Al Chiarmo Signore
Il Sig. Barone Commre G. Plana

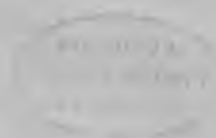
Omaggio del Traduttore

ELEMENTI
DI GEOMETRIA

DI CLAIRAUT



Prezzo: L. 1. 50.



ELEMENTI
DI GEOMETRIA
DI CLAIRAUT

NUOVA TRADUZIONE ITALIANA

CON NOTE

Approvata dal Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione

PER USO

DELLE SCUOLE SECONDARIE E SPECIALI

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
1850

PREFAZIONE DEL TRADUTTORE



Alessio Claudio Clairaut, nato a Parigi il 7 di maggio 1713, venne dal padre, maestro che era di matematiche, avviato fin dalla più tenera fanciullezza agli studi geometrici, col fargli apparare sulle tavole di Euclide a conoscere l'abbici. Di dieci anni studiava il *Trattato delle sezioni coniche* di L'Hospital, e tosto dopo l'*Analisi degli infinitesimi* dello stesso autore: e con tanto frutto, che non compiuto ancora l' anno dodicesimo, era ammesso a leggere dinnanzi all' Accademia delle scienze una sua scrittura *su quattro nuove curve,* e sei anni appresso sedea in quella dotta compagnia, con espressa deroga degli statuti, che vietavano di eleggere nissuno che non avesse compiuti i vent'anni: della qual deroga non era mai venuta prima, e non venne mai più dappoi occasione.

I presagi tratti da questa maravigliosa precocità non furon vani: e Clairaut, nella sua troppo breve (1), ma splendida carriera, seppe collocarsi fra' primi matematici del suo secolo.

A pochi giovani è da Dio concessa tanta forza d'ingegno, che possano proporsi di emulare gli esempli di Clairaut: ma niuno ricuserà di prenderlo per guida in uno studio, in cui egli si mostrava provetto ad una età, alla quale gli altri appena sono giudicati capaci di tentare i primi passi. Gli *Elementi di Geometria* pubblicati da lui nel 1741, ottennero, e non cessaron mai di godere in Francia bellissima fama, grazie all'ordine, alla semplicità, e quindi alla chiarezza con cui sono dettati. L'Autore stesso, nella Prefazione che qui appresso si riproduce, ha reso ragione del pensiero che lo guidò nella scelta e nella esposizione delle proposizioni: io dirò poche parole intorno alla presente Traduzione, della quale, come di cosa mia, nè mi è permesso dir bene, nè voglio certamente dir male.

La sola traduzione italiana degli Elementi di Geometria di Clairaut, di cui io abbia contezza, fu pubblicata in Roma nel 1751. Assai negletta nella lingua, e poco degna dell' originale, essa è stata forse cagione che il libro di Clairaut non ottenesse fra noi successo pari al merito, e non penetrasse nelle nostre scuole: onde è potuto in parte provenire, che molti giovani infastiditi alla lettura di trattati di forma troppo più severa che l' età loro non comportasse, abbiano preso afa di uno studio, di cui sperimentavano le difficoltà, senza poterne ancora comprendere la vera bellezza, ed il valore.

Ora, che per la instituzione delle scuole tecniche e speciali lo studio della Geometria dee maggiormente diffondersi tra noi, mi è sembrato che una nuova traduzione

(1) Egli morì di soli cinquantadue anni il 17 di maggio 1765.

dell'opera di Clairaut, condotta con qualche diligenza, dovesse venire favorevolmente accolta e dai maestri e dagli alunni. L'approvazione del Consiglio Superiore di pubblica istruzione mi dà speranza di non essermi male apposto.

Io mi sono fedelmente attenuto al testo dell'Autore, quanto il diverso genio della lingua mel consentì, sostituendo solo le nuove misure decimali alle antiche francesi, e mutando poche parole, dove il mutare mi paresse dover conferire a precisione od a chiarezza maggiore. In un luogo solo (Part. 3.ª, §§ XVIII e XIX) mi son fatto lecito di levar dal testo (conservandola però religiosamente in una nota a piè di pagina) una dimostrazione, che, a parere dell'Autore stesso, può dar fastidio a' principianti. Le poche note poi che son venuto aggiungendo, hanno per iscopo, o di dare qualche conoscenza del sistema metrico decimale, o di supplire alcuna definizione o proposizione ommessa dall'Autore, e tuttavia, a parer mio, necessaria. Nel che sono stato però molto parco, non piacendomi spacciare col favor del nome di Clairaut la merce mia, nè guastare con troppe racconciature la bella simmetria del suo lavoro.

Per quelli che vorranno seguire nelle Università gli studii della facoltà matematica, questo libro non darà certamente preparazione bastante all'esame di ammissione: ma questi son pochi, e non sarà difficile il dar loro quel soprappiù d'istruzione di cui avranno bisogno. A tutti gli altri, le proposizioni contenute in questi Elementi sono ben bastanti, e gioverà loro, senza alcun dubbio, assai più lo studiare da capo a fondo questo libretto, che il trascinarsi, come troppo sovente succede, con istento e con noia, pei primi libri di altri trattati, ottimi in se stessi, ma troppo ardui e troppo estesi per un primo studio elementare. Nell'indice delle materie sono ripetute tutte le definizioni, e le proposizioni principali dimostrate nel testo:

quest' indice, che ho procurato di rendere quanto ho saputo più compiuto, riuscirà di somma utilità a chi se ne saprà valere come di un filo, che lo guidi nel ricalcare le proprie traccie, e nel riepilogare lo studio fatto.

La Geometria, come ogni altra scienza, e più che ogni altra scienza, malamente s'impara col solo sentirne dimostrare e col ripeterne in termini generali le verità, senza farne frequenti applicazioni : queste sole possono far comprendere pienamente il significato e l' uso delle proposizioni dimostrate. Egli è dunque di tutta necessità, a voler fare in questo insegnamento verun frutto, che i professori, non contenti alla nuda esposizione del testo, qual ch'esso sia, lo vadano continuamente commentando, col proporre agli alunni quistioni svariate, da risolversi con costruzioni grafiche diligentemente condotte, o con computi numerici accuratamente riscontrati. Oltre alla misura dei terreni, che forma direi quasi l'ordito della tela tessuta dal Clairaut, le arti meccaniche somministreranno, per poco che altri ne vada in cerca, infinito numero di esempli atti ad illustrare le verità geometriche, ed a renderne per così dire palpabile l'utilità.

C. I. G.

PREFAZIONE DELL' AUTORE

Quantunque la Geometria sia per se stessa astratta, convien nondimeno confessare, che le difficoltà che incontrano coloro che cominciano ad applicarvisi, provengono il più delle volte dalla maniera con cui essa viene insegnata ne' libri elementari. Si suol cominciare con un gran numero di definizioni, di postulati, di assiomi e di principii preliminari, i quali non prometton altro al lettore che cose molto aride e noiose. Le proposizioni che vengon dopo non aggirandosi sopra argomenti interessanti, ed essendo per altra parte difficili a concepirsi, ne segue comunemente che i principianti si stancano o si disgustano prima di avere acquistata veruna idea distinta di ciò che si vuol loro insegnare.

Per temperare l'aridità naturale dello studio della Geometria, alcuni Autori hanno creduto che potesse bastare di esporre dopo ciascuna proposizione essenziale l'uso che può farsene in pratica: così facendo dimostrano essi bensì l'utilità della Geometria, ma senza agevolarne di molto lo studio. Poichè ciascheduna proposizione precedendo alla indicazione dell'uso ch'essa può avere, la mente perviene solo alle idee sensibili dopo aver incontrata la fatica di concepire le idee astratte.

Alcune riflessioni che io ho fatte sull'origine della Geometria mi danno speranza di poter cansare questi inconvenienti, e di rendere più interessanti insieme e più intelligibili ai principianti le verità geometriche. Io ho considerato che questa scienza, come tutte le altre, debb' essersi formata per gradi; che verisimilmente la necessità è stata quella che ha fatto fare in essa i primi passi, e che questi primi passi non possono essere superiori alle forze de' principianti; poichè da principianti appunto sono stati fatti.

Preoccupato da questo pensiero, io mi son proposto di rin-

tracciare ciò che può aver dato origine alla Geometria; ed ho procurato di spiegarne i principii con un metodo così naturale, che possa supporsi essere stato quello stesso dei primi inventori; in modo tuttavia di evitare tutti i falsi tentativi ch'essi hanno necessariamente dovuti fare.

La misura de' terreni mi è paruta la cosa più atta a far scoprire le prime proposizioni della Geometria; e tale è in fatti l'origine di questa scienza; poichè Geometria significa *misura dei terreni.* Alcuni Autori pretendono che gli Egiziani, vedendo continuamente i limiti de' loro poderi distrutti dalle inondazioni del Nilo, gettassero i primi fondamenti della Geometria, cercando mezzi di determinare esattamente il sito, l'estensione, la figura delle loro tenute. Ma quando ancora non volessimo prestar fede a questi Autori, potremmo noi dubitare che ne' primi tempi gli uomini non abbiano cercato metodi per misurare e per spartire le loro terre? Volendo poi perfezionare questi metodi, le ricerche particolari li hanno condotti a poco a poco a ricerche più generali; e finalmente coll' indagare le relazioni che passano fra grandezze di qualunque specie, formarono essi una scienza di oggetto ben più vasto di quello che si erano da principio proposto, ed alla quale conservarono tuttavia il nome che fin dalla sua origine le avevano imposto.

Per seguire in quest' opera una via simile a quella degli inventori, io procuro di far tosto scoprire dai lettori i principii da' quali può dipendere la semplice misura de' terreni e delle distanze accessibili od inaccessibili ecc. Passo poi ad altre ricerche, le quali hanno tanta analogia colle prime, che la curiosità, naturale a tutti gli uomini, dee portarli a fermarvisi, e giustificando poi questa curiosità con qualche applicazione utile, fo passare così successivamente a rassegna quanto la Geometria elementare ha di più interessante.

Non si può negare, a parer mio, che questo metodo non sia atto, se non altro, ad incoraggiare coloro, ai quali potrebbe venir a noia l'aridità delle verità geometriche nude

di applicazioni. Mà io spero ch'esso avrà ancora quest'altra utilità ben più importante, di avvezzar cioè la mente a cercare e scoprire nuove cose. E perciò appunto mi astengo dall'esporre le proposizioni sotto forma di teoremi; cioè di proposizioni nelle quali si dimostra questa o quella verità, ma senza dar a vedere come si sieno potute scoprire.

Se i primi scrittori di matematiche hanno presentate così le loro scoperte a guisa di teoremi, ciò hanno essi fatto senza dubbio per rendere più pellegrine le loro produzioni, o per isfuggire la fatica di riprender la serie delle idee che li avevano guidati nelle loro ricerche. Checchè ne sia, mi è sembrato assai miglior consiglio il tenere i miei lettori continuamente occupati nel risolvere problemi, cioè nel cercare i mezzi di fare qualche operazione o di scoprire qualche verità sconosciuta, determinando la relazione che passa tra certe grandezze date, ed altre grandezze incognite che occorre determinare. Seguendo questa via i principianti scorgono, a ciascun passo, qual è la ragione che determina l'inventore; ed essi vengono così ad acquistare più facilmente lo spirito d'invenzione.

Mi si opporrà forse che in qualche luogo di questi Elementi io dia troppo peso alla testimonianza degli occhi, poco curando il rigore delle dimostrazioni. Io prego coloro, che fossero per farmi un tale rimprovero, ad osservare ch'io passo così leggiermente sopra quelle sole proposizioni, la verità delle quali si manifesta da se, per poco ch'altri le consideri. Io pratico specialmente così sul principio, ove più spesso s'incontrano proposizioni di questa fatta, perchè ho osservato, che coloro che hanno genio per la Geometria, volentieri vi si esercitano intorno; ed al contrario se ne distolgono, allorchè altri li opprime con dimostrazioni, per così dire, inutili.

Niuno farà le maraviglie che Euclide prenda a dimostrare che due circoli che si tagliano non hanno l'istesso centro; che un triangolo, contenuto dentro di un altro, ha

la somma de' suoi lati più piccola che quella de' lati del triangolo nel quale è compreso. Questo Geometra aveva da convincere sofisti ostinati, che ponean loro gloria nel ripugnare alle verità più manifeste. E' bisognava dunque che allora la Geometria avesse, come la Logica, il soccorso degli argomenti in forma per chiudere la bocca alle vane opposizioni. Ma le cose han mutato aspetto. Ogni ragionamento speso, dove basta il buon senso, è opera gittata, e non vale che ad oscurare la verità, ed a tediare i lettori.

Mi si potrebbe opporre ancora di aver tralasciate parecchie proposizioni che si sogliono comprendere negli Elementi, e di attenermi per le proporzioni alle sole cose principali e fondamentali.

A questo io rispondo, che si trova in questo trattato tutto ciò che giova pel mio disegno; che le proposizioni da me tralasciate sono quelle che non possono per se medesime essere di alcuna utilità, e niente conferiscono ad agevolare l'intelligenza delle altre che sono necessarie a sapersi. Quanto alle proporzioni poi, ciò ch' io ne dico dee bastare per far comprendere le proposizioni elementari che da esse dipendono. Questo è argomento che tratterò più ampiamente negli Elementi d'Algebra che sto per dar fuori.

Finalmente, avendo scelto la misura de' terreni per predisporre i principianti a questo studio, degg' io, per avventura, temere che si confondano questi Elementi co' soliti trattati di Geometria pratica? In questo errore non cadrà chi rifletta che la misura de' terreni non è il vero argomento di questo libro; ch'io me ne valgo solo come di occasione per iscoprire le principali verità geometriche. Avrei potuto medesimamente risalire a queste verità, esponendo la storia della fisica, dell'astronomia, o di qualsivoglia altra parte delle matematiche. Ma allora la moltitudine delle idee straniere che si sarebbero incontrate per via, avrebbe come affogate le idee geometriche, alle quali sole io doveva tener rivolta la mente del lettore.

INDICE DELLE MATERIE

PARTE PRIMA

De' mezzi che debbono naturalmente essere stati impiegati per la misura de' terreni.

PARTE SECONDA

Del metodo geometrico, pel confronto delle figure rettilinee.

PARTE TERZA

Della misura delle figure circolari, e delle loro proprietà.

PARTE QUARTA

Della maniera di misurare i solidi, e la loro superficie.

FINE.

ELEMENTI DI GEOMETRIA



PARTE PRIMA.

DEI MEZZI, CHE DEBBONO NATURALMENTE ESSERE STATI IMPIEGATI PER LA MISURA DE' TERRENI.

Prima d'ogni altra cosa pare che gli uomini han dovuto misurare le lunghezze e le distanze.

I.

Per misurare una lunghezza qualunque, una certa qual geometria naturale ci suggerisce questo spediente; cioè di confrontare la lunghezza che si vuol misurare con una lunghezza conosciuta, riportando questa su quella quante volte può esservi contenuta (1).

(1) La lunghezzà che si sceglie per confronto di tutte le altre dicesi *unità di misura*, od anche semplicemente *misura*. Presso di noi l' unità di misura è il *metro*. Occorrendo sovente di dover misurare lunghezze minori di un metro, e talor anche piccolissime, si agevolano i confronti impiegando, non il metro intero, ma una *parte aliquota* di esso, come un decimo, un centesimo, un millesimo di metro.

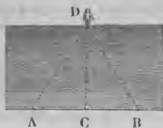
II.

Per misurar poi la distanza che passa tra due punti, bisogna tirare una linea retta dall' uno all'altro punto, e su questa linea riportare la misura conosciuta: poichè tutte le altre linee che potrebber condursi fra que' due punti facendo necessariamente un deviamento più o meno grande, sono più lunghe che la linea retta, la quale non fa deviamento alcuno.

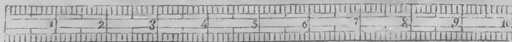
III.

Accade pur sovente di dover misurare la distanza di un punto da una linea. Per esempio un uomo posto in D (Fig. 1ª) sulla riva di un fiume vuol sapere quanta sia la distanza del luogo dove egli sta dall'altra riva AB. È chiaro che in questo caso, per

Fig. 1.



La decima parte del metro dicesi		Decimetro
La centesima	....	Centimetro
La millesima	....	Millimetro



La figura qui impressa rappresenta la vera lunghezza del *decimetro*, diviso in dieci centimetri ed in cento millimetri.

Quando all'incontro si dee misurare una lunghezza molto grande, si prende per unità un *multiplo* del metro, come a dire una linea lunga dieci, cento o mille metri.

Una misura di 10 metri dicesi	....	Decametro
100	....	Ettometro
1000	....	Chilometro
10000	... .	Miriametro.

Così una lunghezza di 3458 metri può anche esprimersi dicendo che contiene tre chilometri, quattro ettometri, cinque decametri, e otto metri.

Così ancora, secondo la notazione delle frazioni decimali una lunghezza di 0m, 748 contiene sette decimetri, quattro centimetri, ed otto millimetri.

misurar la distanza cercata, bisogna prender la più corta di tutte la linee rette DA, DB ecc., che si posson tirare dal punto D alla retta AB. Ora è facile il vedere che questa linea più corta è la DC, che si suppone non pendere nè verso A, nè verso B. Questa, che chiamasi perpendicolare, è dunque quella sulla quale bisogna riportare la nota misura per aver la distanza DC, del punto D dalla retta AB. Ma è pur manifesto, che per posare questa misura sulla linea DC, è necessario saper segnare questa linea sul terreno. È dunque necessario conoscere il modo di tirare perpendicolari.

IV.

Egual bisogno s'incontra in infiniti altri casi. Per esempio si sa, che a cagione della regolarità delle figure, quali sono ABCD, FGHI, chiamate *rettangoli*, e chiuse da quattro lati perpendicolari tra loro, si suol dare questa forma alle case, alle lor parti interiori, a' giardini, alle camere, a' parati de' muri ecc.

Fig. 2.

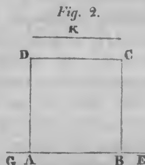
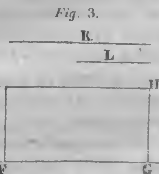


Fig. 3.



La prima di queste figure, cioè ABCD (Fig. 2ª) che ha i quattro lati eguali, si chiama comunemente *quadrato*. L'altra FGHI (Fig. 3ª), che non ha che i lati opposti uguali, ritiene il nome di *rettangolo*.

V.

Quando si ha da tirare una perpendicolare, questa o dee *abbassarsi* sulla retta data da un punto preso fuori della retta stessa, o dee *innalzarsi* da un punto preso sulla retta medesima.

Se dal punto C (Fig. 4ª), preso sulla linea AB, si voglia alzare la linea CD perpendicolare ad AB, bisognerà che questa linea non penda nè verso A, nè verso B.

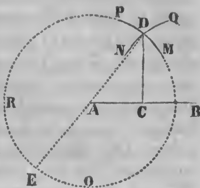


Fig. 4.

Supponendo primieramente che C stia ad ugual distanza da A e da B, e che la retta CD non penda da alcun lato, è chiaro che ciascheduno dei punti di questa linea sarà egualmente distante da A e da B. Basterà dunque trovare un punto qualunque D, tale, che la sua distanza dal punto A sia uguale alla sua distanza dal punto B; perchè allora tirando per C, e per questo punto D una linea retta CD, questa linea sarà la perpendicolare cercata.

Per avere il punto D, si potrà andar provando e riprovando, e quasi cercando a tentone: ma questa maniera di operare per via di tentativi non dà veruna soddisfazione all' intelletto, il quale si contenta de' soli metodi che gli lascian comprendere la ragione per cui conducono a far scoprire ciò che si cerca. Ecco quello che si dee seguire nel caso presente:

Si prenda una comune misura, per esempio una cordella se si opera sul terreno, od un compasso di una determinata apertura se l'operazione si fa sulla carta.

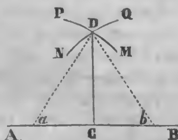
Presa questa misura si fissi nel punto A l'estremità della cordella o una punta del compasso, e facendo girare l'altra punta di questo o l'altra estremità della cordella si descriva l'arco PDM. Poi senza cangiar misura si faccia l'istessa operazione al punto B, e si descriva l'arco QDN; questo col tagliare il primo arco in D, darà il punto cercato.

Infatti, il punto D appartenendo egualmente ai

due archi PDM, QDN descritti con una stessa misura, la sua distanza dal punto A sarà uguale alla distanza dal punto B. Dunque CD non penderà nè verso A, nè verso B. Dunque questa linea sarà perpendicolare sopra AB.

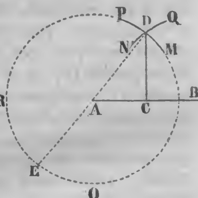
Se il punto C (Fig. 5ª) non si trova ad ugual distanza da A e da B, bisogna prendere due altri punti *a* e *b* egualmente lontani da C, e servirsi di questi in luogo di A e di B, per descriver gli archi PDM, QDN (1).

Fig. 5.



VI.

Fig. 4.



Se una delle tracce testè segnate col compasso o con la cordella, per esempio PDM (Fig. 4ª) fosse stata continuata in O, in E, ed in R ecc. finchè ella ritornasse al medesimo punto O, la traccia tutta intera si chiamerebbe circonferenza di circolo, o semplicemente circonferenza.

Se si descrive soltanto una parte PDM della circonferenza, questa parte si chiama arco del circolo.

Il punto fisso A si chiama centro dell' arco, o centro del circolo.

E l'intervallo AD il suo raggio (2).

(1) Ogni retta come D*a* (fig. 5) che non è perpendicolare sopra un'altra retta AB dicesi *obliqua* : il metodo insegnato nel testo per condurre una perpendicolare ad una retta data riposa dunque sul principio, che le *oblique* egualmente lontane dalla perpendicolare hanno la stessa lunghezza.

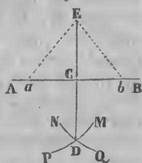
(2) Circonferenza di circolo è dunque una linea curva di cui tutti i punti sono egualmente lontani da un punto che dicesi *centro*. La distanza fra la circonferenza e il centro chiamasi *raggio*.

Ogni retta, come DAE, che passi pel centro A e che termini da entrambe le parti alla circonferenza, chiamasi diametro. È chiaro che una tal linea è il doppio del raggio: e perciò il raggio si chiama talora semidiametro.

VII.

La maniera che abbiamo insegnata per alzare una perpendicolare sopra una linea AB, ci conduce a trovar pure il modo di calare una perpendicolare da qualunque punto E (Fig. 6ª), preso fuori di questa linea. Fissata in E l'estremità della cordella o la punta del compasso, e con un medesimo intervallo Eb, si segneranno due punti a e b sulla linea AB; si cercherà poi, come nell' articolo precedente, un altro punto D, il quale sia ad egual distanza dal punto a e dal punto b; e per questo punto e per E si tirerà la retta DE, la quale avendo ciascuna delle sue estremità egualmente distante da a e da b, non penderà più verso l'uno di questi punti che verso l'altro, epperò sarà perpendicolare ad AB.

Fig 6.

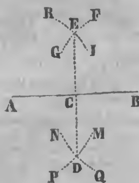


VIII.

Dall'operazion precedente si ricava la soluzione di un nuovo problema.

Per dividere una linea retta AB (Fig. 7ª) in due parti uguali, dai punti A e B presi come centri, e con un' apertura di compasso qualunque, si descrivano gli archi REI, GEF; da' medesimi centri, e con la medesima apertura o con qualunque altra, si descrivano gli archi PDM, QDN; e la linea ED, la quale congiungerà

Fig. 7.

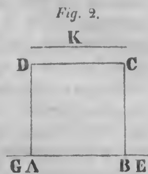


i punti di intersezione E e D, dividerà la retta AB in due parti uguali AC e CB.

IX.

Trovata la maniera di tirare delle perpendicolari, è facilissimo il servirsene per descrivere quelle figure che si chiamano rettangoli e quadrati, delle quali si è parlato nell'articolo IV. Si vede facilmente, che per fare un quadrato ABCD (Fig. 2ª), i cui lati sieno eguali a una linea data K, bisogna prendere sulla retta GE un intervallo AB eguale a K; poi a' punti A e B alzare (art. V) le perpendicolari AD, BC ciascuna eguale a K, e per ultimo tirare DC.

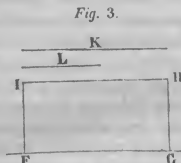
Fig. 2.



X.

Se si vuol descrivere un rettangolo FGHI (Fig. 3ª), di cui la lunghezza sia K, e la larghezza L, si prenderà FG uguale a K; si alzeranno poi le perpendicolari FI, GH ciascuna eguale a L, e finalmente si tirerà HI.

Fig. 3.

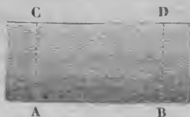


XI.

Nel fare alcuni lavori, come parapetti, canali, strade ecc., occorre di tirare linee rette *parallele*, cioè tali, che la loro distanza sia dappertutto misurata da perpendicolari di eguale lunghezza. Or per menare queste parallele il metodo più facile parmi quello, di cui ci siam serviti per descrivere rettangoli. Sia AB (Fig. 8ª), per esempio, un lato di un canale e sia CA la larghezza che gli si vuol dare; o per proporre il quesito d'una maniera più geometrica e più generale: suppongasi, che si voglia tirare per C

la retta CD parallela ad AB; si prenderà a piacimento un punto B sulla linea AB, e si opererà, come se avendo la base AB e l'altezza AC, si volesse fare un rettangolo ABCD (Fig. 8ª). Così facendo le linee CD, AB prolungate all'infinito, saranno sempre parallele; ovvero, quel che è l'istesso, non s'incontreranno mai tra loro.

Fig. 8.



XII.

La regolarità delle figure rettangole fa sì ch'esse vengano spesso in uso, come già abbiam detto, epperò occorre sovente di conoscere la loro grandezza; si domanderà, per esempio, quanta tappezzeria vi voglia per parare una camera; ovvero quanti quadrelli sian necessarii per ammattonare una casa che abbia forma di rettangolo ecc.

Per ciò, ognun vede, che il mezzo più semplice e più naturale è di servirsi di una commune misura, la quale applicata più volte alla superficie che dee misurarsi, tutta successivamente la copra; il qual metodo è sostanzialmente lo stesso, di cui ci siamo valsi per determinare la lunghezza delle linee.

Ora è evidente, che la comune misura delle superficie non può esser altro che una superficie, come a dire quella di un metro quadrato, di un decimetro quadrato ecc.; così dunque misurare un rettangolo viene a dir lo stesso che determinare il numero dei metri quadrati, o dei decimetri quadrati ecc., che la sua superficie contiene (1).

(1) Per *metro quadrato* dee intendersi la superficie di un quadrato di cui ciascun lato abbia un metro di lunghezza: similmente il *decimetro quadrato*, il *centimetro quadrato*, il *millimetro quadrato* sono quadrati che hanno per lato un decimetro, un centimetro, un millimetro rispettivamente.

Rechiamone, per maggior chiarezza, un esempio. Supponghiamo, che il rettangolo ABCD (Fig. 9ª) abbia 7 metri di altezza BC, sopra una base AB di 8 metri; si potrà riguardare questo rettangolo, come diviso in sette fascie *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, ciascuna delle quali conterrà manifestamente 8 metri quadrati; sarà dunque il valore del rettangolo 7 volte 8 metri quadrati, cioè 56 metri quadrati.

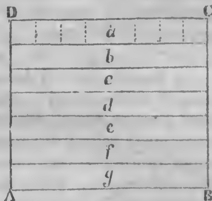


Fig. 9.

Ora si insegna negli elementi di aritmetica, che col multiplicare due numeri tra di loro si viene a prendere uno di essi tante volte, quante unità sono contenute nell' altro; onde si scorge che corre una perfetta analogia tra la moltiplicazione ordinaria, e l'operazione fatta per misurare il rettangolo; e che si determina il numero dei metri quadrati o dei decimetri quadrati, che la sua superficie contiene, moltiplicando il numero dei metri e dei decimetri contenuti nella sua altezza, per lo numero dei metri o dei decimetri contenuti nella base (1). Infatti così

(1) Ne segue che un quadrato il quale abbia il lato doppio di quello di un altro quadrato, avrà la superficie quattro volte maggiore: se il lato d' un quadrato è tre volte quello d'un altro, la superficie è nove volte maggiore ecc., come si vede nella tavola seguente.

Lato	Superficie	Lato	Superficie	Lato	Superficie
1	1	6	36	11	121
2	4	7	49	12	144
3	9	8	64	13	169
4	16	9	81	14	196
5	25	10	100	ecc.	ecc.

operando si viene appunto a prendere tante volte il numero dei metri quadrati contenuti in ciascuna delle fascie in cui il rettangolo s' intende diviso, quante sono le fascie medesime: cioè, si viene a determinare il numero dei metri quadrati contenuti nel rettangolo intero.

XIII.

Le figure, che si hanno da misurare, non sono sempre rettangolari; così occorre talora di determinare l'estensione di un lavoro fatto sopra un terreno irregolare; talora di sapere quante *are* od *ettare* contenga una terra terminata irregolarmente. Era dunque necessario, dopo di aver trovato il metodo di determinare la superficie de' rettangoli, di trovar pure quello di misurare le figure che non sono rettangolari.

Si vede in primo luogo che per la pratica la difficoltà consiste solo nel misurare le figure rettilinee, qual è la

Per questa ragione i numeri 1, 4, 9, 16 ... si chiamano i *quadrati* de' numeri 1, 2, 3, 4 ....; e viceversa questi si dicono le *radici quadrate* dei primi: ne risulta che per formare il quadrato di un numero convien moltiplicarlo per se stesso, e così il quadrato di 78 è 6184, perchè 78 volte 78 fanno 6184: e viceversa il 78 è la radice quadrata di 6184.

Da quanto precede si conclude facilmente, che

Il metro quadrato contiene	100 decimetri quadrati
Il decimetro quadrato	100 centimetri quadrati
Il centimetro quadrato	100 millimetri quadrati

e similmente

Il decametro quadrato contiene	100 metri quadrati
L'ettometro quadrato	100 decametri quadrati, ossia 10000 metri quadrati.
Il chilometro quadrato	100 ettometri quadrati, ossia 1000000 metri quadrati.

Il decametro quadrato serve di unità superficiale per la misura de' terreni, e si chiama *ara*: la centesima parte dell' ara, equivale ad un metro quadrato, e si chiama *centiara*: l' ettometro quadrato contiene 100 are, e si chiama *ettara*.

ABCDE (Fig. 10): cioè le figure terminate tutt' intorno da linee rette. Perchè se nel contorno di un terreno si trova qualche linea curva, come nella figura ABCDEFG (Fig. 11), egli è evidente, che dividendo questa curva in un numero molto grande di parti, ciascuna di queste potrà considerarsi come una linea retta, senza che si commetta errore sensibile nella misura della superficie.

Fig. 10.

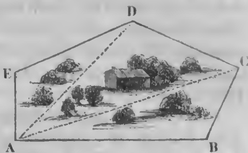
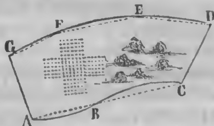


Fig. 11.

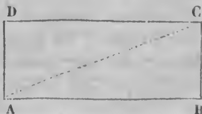


Ciò posto, malgrado l'infinita varietà delle figure rettilinee, esse ponno tutte misurarsi nell' istessa maniera, dividendole in figure di tre lati, dette *triangoli*: la qual cosa si farà in maniera semplice insieme e comoda, tirando da un punto qualunque A del contorno della figura ABCDE (Fig. 10), le linee rette, o diagonali AC, AD ecc. a' punti C, D ecc.

XIV.

Resta che si trovi la misura de' triangoli così formati. Ora per trovar ciò che s' ignora, il mezzo più sicuro è di cercare, se in ciò che si sa, non siavi nulla che si riferisca a ciò che vuolsi conoscere: ma noi già abbiam veduto, che tutto il rettangolo ABCD (Fig. 12), ha per misura il prodotto nella sua base AB nell' altezza CB. È facile poi ve-

Fig. 12.

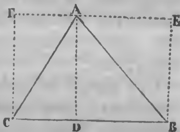


dere, che questa figura divisa a traverso per mezzo della linea AC, che si chiama diagonale, si trova partita in due triangoli uguali; e quindi s'inferisce, che ciascuno di questi triangoli avrà per misura metà del prodotto della base AB, ovvero DC per l'altezza CB, ovvero DA.

Egli è vero, che non sempre avviene, che i triangoli, i quali si deggiono misurare, abbiano due dei loro lati perpendicolari l'uno all'altro, come i triangoli ABC, ADC, i quali si chiamano perciò *triangoli rettangoli*; ma questo poco importa: potendosi sempre ridurre a triangoli di questa specie.

Infatti dal vertice A, d'un triangolo qualunque ABC (Fig. 13), calando la perpendicolare AD sulla base BC, il triangolo ABC si troverà partito in due triangoli rettangoli ABD, ADC.

Fig. 13.



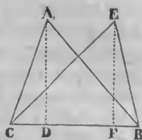
Riprendendo ora il filo del discorso, egli è evidente, che come i due triangoli ABD, ADC saranno rispettivamente eguali alla metà de' rettangoli AEBD, ADCF; così pure il triangolo proposto ABC sarà la metà del rettangolo EBCF, il quale avrà BC per base, e AD per altezza: ma la superficie del rettangolo EBCF è uguale al prodotto dell' altezza EB, ovvero AD per la base BC; dunque il triangolo ABC avrà per misura la metà del prodotto della base BC per la perpendicolare AD, altezza del triangolo.

Abbiamo dunque il mezzo di misurare tutti i terreni terminati da linee rette: poichè non ve n' ha alcuno, che non possa scomporsi in triangoli: e si può sempre dal vertice di ciascuno di questi triangoli calare una perpendicolare sulla base di esso.

XV.

Dal metodo, che abbiamo dato per misurare l'area, ovvero la superficie de' triangoli, coll' adoprare solo la loro base e la loro altezza, senza tener verun conto della lunghezza de' lati, si ricava questa proposizione, ovvero questo teorema; che tutti i triangoli, come ECB, ACB (Fig. 14), i quali hanno la base comune CB, e le altezze EF, AD uguali, hanno la medesima superficie.

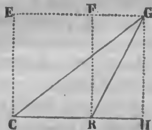
Fig. 14.



XVI.

Per agevolare l'intelligenza del principio, che dà la misura de' triangoli, noi abbiamo scelto per base un lato, su cui potesse cadere la perpendicolare calata dal vertice opposto; la qual cosa si può sempre fare, quando si tratta di misurar terreni. Ma perchè nel confronto de' triangoli che hanno la medesima base, le perpendicolari calate dai loro vertici possono cadere fuori del triangolo, come nella figura 15, par che sia necessario di vedere, se un triangolo, qual è BCG, sia pur sempre la metà del rettangolo ECBF, che ha la stessa base CB e la stessa altezza GH. Ora di ciò è facile l'assicurarsi, avvertendo che il triangolo CGH, somma dei due triangoli CGB, GBH, è la metà del rettangolo ECHG somma de' due rettangoli ECBF, FBHG; e così, che i due triangoli CGB, GBH, presi insieme sono la metà del rettangolo ECHG; or il triangolo GBH è la metà del rettangolo FBHG; dunque il triangolo proposto BCG è la metà dell'altro rettangolo ECBF, il quale ha BC per base, e GH per altezza.

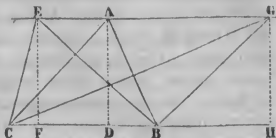
Fig. 15.



XVII.

La proposizione dimostrata ne' tre articoli precedenti può ancora generalmente proporsi in questi termini: i triangoli EBC, ABC, GBC (Fig. 16) sono eguali, allorchè hanno una base comune BC, e sono compresi tra le medesime parallele EAG, CBH, cioè a dire, allorchè i loro vertici E, A, G si trovano in una medesima linea retta EAG parallela alla retta CB. Perchè allora (art. XI) le loro altezze misurate dalle perpendicolari EF, AD, GH sono le medesime.

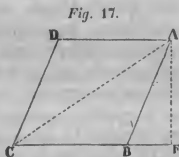
Fig. 16.



XVIII.

Tra le figure rettilinee, che si possono misurare col metodo che abbiamo insegnato, ve n' ha alcune che s'accostano alla regolarità de' rettangoli. Tale è la figura ABCD (Fig. 17), terminata da quattro lati, ciascuno de' quali è parallelo al lato opposto. Queste figure diconsi *parallelogrammi*, e sono più facili a misurarsi che le altre figure rettilinee, tranne i rettangoli. Infatti diviso il parallelogrammo ABCD in due triangoli ABC, ACD, questi due triangoli saranno, come ognun vede, uguali. Or siccome ciascuno di questi triangoli è uguale alla metà del prodotto dell'altezza AF per la base BC, il parallelogrammo avrà per misura il prodotto intiero della base BC per l'altezza AF.

Fig. 17.



XIX.

Ne segue, che tutti i parallelogrammi ABCD, EBCF

(Fig.[e] 18 e 19), che hanno la base BC comune, e si trovano tra le medesime parallele, sono uguali tra

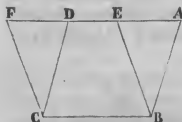


Fig. 18.

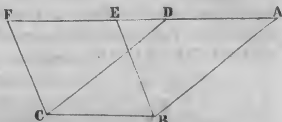


Fig. 19.

loro: la qual cosa facilmente si dimostra indipendentemente ancora dalle cose dette finora, osservando, che il parallelogrammo ABCD si muta nel parallelogrammo EBCF, aggiungendovi il triangolo DCF, e dalla figura intiera ABCF togliendo il triangolo ABE; e che supponendo che i due triangoli DCF, ABE siano uguali, il parallelogrammo ABCD non avrà mutato grandezza nel mutarsi in EBCF. Ora l'eguaglianza di que' due triangoli apparirà manifesta, qualora si osservi, che AB e CD essendo parallele, come pure BE, CF, il triangolo ABE non è altro che il triangolo stesso DCF, il quale siasi mosso sulla sua base, in maniera, che il punto A sia andato in D, ed il punto E in F (1).

(1) Le figure di quattro lati, come CEAB (fig. 16), che hanno due soli lati paralleli AE, BC, diconsi *trapezii.* Dividendo il trapezio CEAB in due triangoli per mezzo della diagonale EB, il triangolo CEB avrà per misura il prodotto della base CB per la metà dell'altezza EF; ed il triangolo EAB avrà per misura il prodotto della base AE per la metà dell'altezza AD. Ma a cagione del parallelismo delle basi AE, BC, le due altezze EF, AD sono eguali: dunque la somma delle aree dei

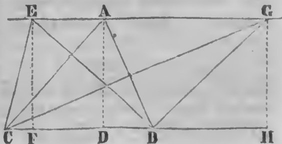


Fig. 16.

XX.

Vi sono altre figure rettilinee facili a misurarsi, le quali chiamansi poligoni regolari; queste sono terminate da lati uguali, i quali hanno tutti la medesima inclinazione o pendenza gli uni rispetto agli altri. Tali sono le figure ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH (Fig.e 20, 21 e 22).

Fig. 20.

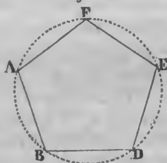


Fig. 21.

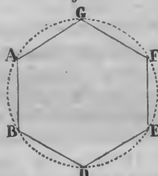
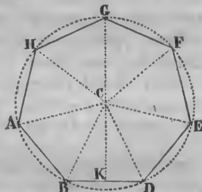


Fig. 22.



Siccome si suol dare la forma simmetrica di queste figure alle vasche, alle fontane, alle pubbliche piazze ecc., prima d' insegnare come si misurino, credo necessario di dire come si descrivano.

XXI.

Si segni una circonferenza di circolo ABDEF e si divida in tante parti uguali AB, BD, DE ecc.,

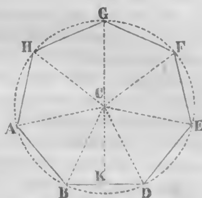
due triangoli, ossia l' area del trapezio proposto ha per misura il prodotto della somma delle due basi AE, BC per la metà dell' altezza AD, oppure, ciò che torna allo stesso, il prodotto della semisomma delle basi per l' altezza, od ancora la metà del prodotto della somma delle basi per l'altezza.

quanti lati dee avere il poligono: pei punti di divisione A, B, D, E ecc. si tirino le rette AB, BD, DE ecc.; si formerà così il poligono domandato, il quale si chiamerà pentagono, esagono, ettagono, ottagono, enneagono, decagono ecc., secondo che avrà cinque, sei, sette, otto, nove, dieci ecc. lati (1).

XXII.

Per aver la misura di un poligono regolare, si potrà impiegare il metodo esposto (art. XIII) per tutte le figure rettilinee. Ma facile è l'accorgersi, che la via più breve è di dividere il poligono in triangoli uguali, i quali abbiano tutti il centro C per vertice (Fig. 22). Poichè prendendo uno di questi triangoli, per esempio CBD, e tirando sulla base BD la perpendicolare CK (la quale in tal caso

Fig. 22.



(1) Per *poligono* s' intende generalmente una figura terminata da qualsivoglia numero di lati rettilinei: quando tutti i lati non sono eguali ed egualmente inclinati il poligono dicesi *irregolare*. I poligoni irregolari si distinguono con gli stessi nomi che i poligoni regolari di un egual numero di lati. Così la figura ABCDE (fig. 10) è un *pentagono* irregolare, e la figura ABCDEFG (fig. 32) è un *ettagono* irregolare.

Fig. 10.

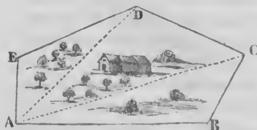
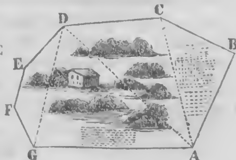


Fig. 32.

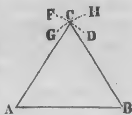


si chiama l'apotema del poligono), l'area di questo triangolo sarà uguale al prodotto della base BD per la metà di CK, e prendendo questo prodotto tante volte quanti sono i lati del poligono, si avrà l'area di tutta la figura.

XXIII.

Se si divide la circonferenza del circolo in tre parti uguali, si forma, operando come si è detto, un triangolo detto *equilatero*, perchè ha tutti i lati eguali tra loro. Se si divide la circonferenza in quattro parti uguali, si forma un quadrato; ma queste due figure, che sono le più semplici fra tutti i poligoni regolari, possono facilmente descriversi senza far uso della divisione del circolo: come ciò possa farsi pel quadrato si è già veduto (art. IX). Per descriver poi un triangolo equilatero sopra una base data AB, bisogna, da' punti A e B come centri e con un' apertura di compasso eguale ad AB, descrivere gli archi DCF e GCH (Fig. 23); da' punti A e B tirare le rette AC, BC al punto C sezione comune dei due archi DCF, GCH, e vertice del triangolo.

Fig. 23.



XXIV.

Potremmo qui al metodo di descrivere geometricamente il triangolo equilatero e il quadrato, aggiunger quello che serve per descrivere geometricamente un pentagono, come han fatto gli Autori di parecchi libri elementari. Ma i principianti, pei quali soli scriviamo, difficilmente potrebbero tener dietro ai ragionamenti per cui si dimostra la maniera di descrivere questa figura (la qual via facilmente ci viene additata dall' algebra), epperò ci sembra miglior consiglio rimandare la descrizione del pentagono al

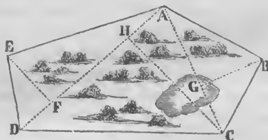
trattato che seguirà dopo questo, e nel quale daremo questa descrizione insieme con quella de' poligoni di un maggior numero di lati, i quali senza il soccorso dell'algebra non potrebbero esser descritti geometricamente.

Da' poligoni che hanno più di cinque lati, e che io dico non potersi descrivere che adoprando il calcolo algebraico, bisogna eccettuare quelli di 6 lati, di 12, di 24, di 48 ecc., e quelli di 8 lati, di 16, di 32, di 64 ecc., i quali si possono facilmente descrivere col soccorso della sola geometria elementare, come si vedrà sulla fine di questa Prima Parte.

XXV.

Tornando ora alla misura de' terreni, osservo che essi sono talvolta così disposti, che non si possono mettere in pratica le operazioni prescritte pei metodi precedenti.

Fig. 24.



Suppongo che sia ABCDE (Fig. 24) la figura di un campo, di un recinto ecc., di cui si voglia misurare la superficie. Secondo le cose finqui dette, bisognerà dividere ABCDE in tanti triangoli, come ABC, ACD, ADE: indi misurare questi triangoli dopo aver abbassate le perpendicolari EF, CH, BG. Ma se entro lo spazio ABCDE si trovasse qualche ostacolo, come un rialto, un bosco, un lago ecc., il quale impedisse di tirar le linee che sono necessarie, che si dovrebbe fare allora? Qual metodo bisognerà seguire per vincere la difficoltà del terreno? Il pensiero che primo si presenta alla mente è di scegliere qualche

terreno sul quale si possa facilmente operare, e di descrivere su questo terreno de' triangoli eguali a' triangoli ABC, ACD ecc. Vediamo qual artifizio si debba usare per formare questi nuovi triangoli.

XXVI.

Supponiamo dapprima, che l'ostacolo si trovi entro il triangolo ABC (Fig. 25), di cui sieno noti i lati, e che si voglia delineare un triangolo eguale sul terreno che si è scelto a quest' uopo. In primo luogo si tirerà una linea DE (Fig. 26) eguale al lato AB; si prenderà poi una cordella della lunghezza BC, e fissando uno de' suoi capi in E, si descriverà l'arco IFG, che avrà la lunghezza della cordella per raggio; con un' altra cordella presa eguale ad AC, e di cui parimente si attaccherà un de' capi in D, si segnerà l'arco KFH, il quale taglierà l'altro arco nel punto F: tirando allora le linee DF, FE, si avrà un triangolo DEF uguale al triangolo proposto ABC. Ciò è evidente; poichè i lati DF ed EF, che si tagliano nel punto F, essendo eguali rispettivamente ai lati AC e BC, che concorrono nel punto C, ed essendo presa la base DE uguale ad AE, non sarebbe possibile che la posizione delle linee DF ed EF, rispetto alla DE, fosse differente dalla posizione delle linee AC e BC rispetto ad AB. È vero che si potrebbero prendere le linee DFE al dissotto di DE, ma il triangolo si troverebbe essere il medesimo, e solamente sarebbe rovesciato.

Fig. 25.

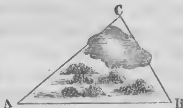
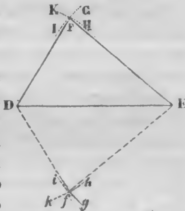


Fig. 26.



XXVII.

Se si potessero misurare due soli lati del triangolo ABC (Fig. 27), per es. i lati AB, BC, egli è chiaro, che con questi soli non si potrebbe formare un secondo triangolo eguale ad ABC. Infatti, ancorchè si fosse preso DE (Fig. 28) uguale a BC, e DF uguale a BA, non si saprebbe in qual modo collocare il secondo lato rispetto al primo. Per rimuovere questa difficoltà, ecco un facile ripiego. Si fa che la DF penda sulla DE, precisamente come la AB pende sulla BC, o secondo l'espressione geometrica, si dà all'angolo FDE la medesima apertura che ha l'angolo ABC.

Fig. 27.

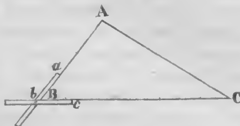
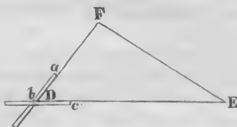


Fig. 28.



XXVIII.

Per fare questa operazione si prende uno strumento come abc (Fig. 27), composto di due righe, che possano girare intorno a b, e si posano queste righe in modo che l'una si applichi sulla direzione del lato BC, e l'altra sulla direzione del lato BA. In questa maniera esse fanno tra loro lo stesso angolo che i lati AB, BC. Collocando quindi la riga bc sulla base DE (Fig. 28), in maniera che il centro b cada sul punto D, e che l'istrumento conservi sempre la stessa apertura, la riga ab darà la posizione della linea DF, la quale farà colla linea DE l' angolo FDE uguale all' angolo ABC. Prendendo dunque

la linea DF della medesima lunghezza che BA, non si dovrà far altro che tirare pei punti F, E la retta FE, e si formerà così il triangolo FED intieramente uguale al triangolo ABC. Pratica semplicissima, che suppone questo principio evidente, che un triangolo è determinato quando si conoscono le lunghezze di due de' suoi lati, e la loro scambievole inclinazione; ovvero, quel che torna al medesimo, che un triangolo è uguale a un altro, allorchè due de' loro lati sono respettivamente uguali, e che l'angolo compreso tra questi lati è ugualmente aperto.

XXIX.

Si potrebbe ancora fare l'angolo FDE (Fig. 30) uguale all'angolo ABC (Fig. 29) nella maniera seguente. Dal centro B, e con raggio qualunque B*a*, descrivasi un arco *ahc*. Così dal centro D, e con lo stesso raggio, descrivasi l'arco *eif*: resterà da cercare un punto *f* che abbia sull'arco *eif* la stessa posizione che ha il punto *a* sull'arco *cha*. Ora si troverà facilmente il punto *f*, per mezzo della retta *ac*, che chiamasi la *corda* dell'arco *ahc*. Perchè se dal punto *e* come centro, e con raggio uguale ad *ac*, si descriverà l'arco *lfk*, l'intersezione dei due archi *eif*, *lfk*, darà il punto cercato *f*.

Fig. 29.

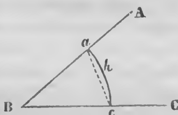
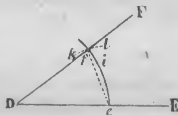


Fig. 30.



Tirando poi pei punti D, *f*, la linea D*f*F, s'avrà l'angolo FDE, uguale all'angolo ABC; la qual cosa è evidente (art. XXVI), poichè i triangoli B*ac*, D*fe*, saranno affatto uguali in tutte le loro parti.

XXX.

Quando si vuol fare il triangolo FDE (Fig. 28) uguale al triangolo ABC (Fig. 27), se avviene che si possa misurare uno solo de' suoi lati, per esempio BC, si ricorre agli angoli ABC ed ACB. Avendo fatto DE uguale a BC, si dispongono le rette FD e FE in modo che facciano con DE gli stessi angoli che AB ed AC fanno con BC. Allora queste due rette incontrandosi in F chiudono il triangolo FDE uguale al triangolo dato ABC. Il principio, sul quale questa operazione si appoggia, è pure così semplice, che non ha bisogno di dimostrazione.

Fig. 27.

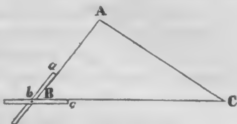
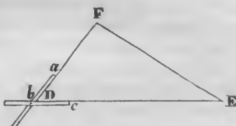


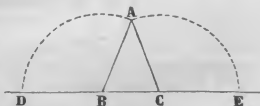
Fig. 28.



XXXI.

Se de' tre lati del triangolo ABC (Fig. 31), non si potesse misurare che la base BC, ma si sapesse d'altronde che questo triangolo è *isoscele*, cioè che i due lati AB ed AC sono eguali, è evidente, che basterebbe misurare uno de' due angoli ABC, ACB, poichè questi due angoli sarebbero eguali. Ciò si comprende facilmente supponendo che i due lati AB, AC, siano da prima coricati in BD, CE, sui prolungamenti della base BC, e che poi si rialzino per

Fig. 31.



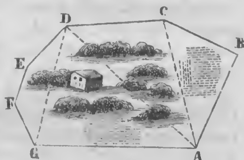
venirsi appuntellare l'un contro l'altro nel punto A; poichè, a motivo dell'eguagliauza di questi due lati, essi dovranno percorrere cammini eguali per venirsi ad incontrare. Dunque quando si saranno incontrati in A, saranno egualmente inclinati sulla base BC. Dunque l'angolo ABC sarà uguale all'angolo ACB.

XXXII.

Per tornare alla misura de' terreni, si vede che, quali che sieno gli ostacoli che vi s' incontreranno, sarà facile col metodo precedente di trasportare sopra un terreno libero tutti i triangoli, in cui può dividersi lo spazio che si vorrà misurare.

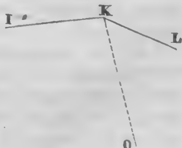
Supponghiam, per es., che si voglia misurare una selva ABCDEFG (Fig. 32). Primieramente si formerà un triangolo eguale ad ABC, la qual cosa potrà farsi senza entrare nella selva, misurando i due lati AB, BC, e l'angolo compreso CBA.

Fig. 32.



Questo triangolo così descritto darà l'angolo BCA e la lunghezza di AC, e siccome si potrà misurare il lato esteriore DC e l'angolo DCA, si potrà pure costruire un triangolo eguale al triangolo CAD; e si conosceranno così i lati DC e CA. L' angolo DCA si misurerà formando in disparte (Fig. 33) un angolo IKL uguale all'angolo DCB, e togliendone l'angolo LKO uguale all' angolo noto BCA, poichè resterà così l'angolo IKO uguale all'angolo cercato DCA.

Fig. 33.

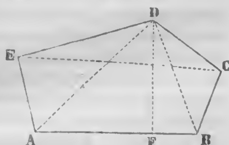


Determinato così il triangolo ADC, si conosceranno il lato DC e l' angolo DCA, e si passerà a determinare nello stesso modo il triangolo DAG, e poscia il rimanente della figura.

XXXIII.

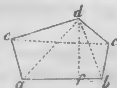
Questo metodo di misurare que' terreni, entro i quali non si può operare, incontrerebbe nella pratica grandissime difficoltà. Poche volte, infatti, si potrà trovare uno spazio piano e libero, tanto grande da potervi segnare triangoli uguali a quelli del terreno che si vuol misurare. E quando pur si trovasse, la grande lunghezza de' lati de' triangoli può rendere le operazioni molto difficili: e difficile senza dubbio e forse impossibile sarebbe calare, co' soli mezzi che abbiamo indicati, una perpendicolare da un punto lontano da essa alcune migliaia di metri. È necessario dunque avere un mezzo che supplisca a queste operazioni.

Fig. 34.



Questo mezzo si presenta, per così dire, da sè, poichè tosto viene in capo ad ognuno di rappresentare la figura ABCDE (Fig. 34), che si ha da misurare, con una figura simile *abcde* (Fig. 35) più piccola, nella quale verbigrazia il lato *ab* sia di 100 centimetri, se il lato AB è di 100 metri, il lato *bc* di 45 centimetri, se BC è di 45 metri e via discorrendo; e poi di conchiudere che se la superficie della figura ridotta *abcde* è di 60000 centimetri quadrati, quella della figura ABCDE deve essere di 60000 metri quadrati.

Fig. 35.



Ma prima d' andar più innanzi conviene esaminare in che consista la similitudine di due figure.

XXXIV.

Per poco che vi si rifletta si riconoscerà che due figure ABCDE, *abcde* (Fig.e 34 e 35), per esser simili devono essere tali che gli angoli A, B, C, D, E della grande sieno rispettivamente eguali agli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e* della piccola; e di più che ciascuno dei lati *ab*, *bc*, *cd* ecc. della piccola, contenga tante unità di lunghezza di una data specie, quante unità di lunghezza di un' altra specie sono contenute nel lato corrispondente AB, BC, CD ecc. della grande. Per esempio, che i lati *ab*, *bc*, *cd* ecc. contengano tanti decimetri, o centimetri, o millimetri, quanti sono i metri contenuti nei lati AB, BC, CD ecc. rispettivamente.

XXXV.

Per esprimere questa seconda condizione i Geometri dicono essere necessario che i lati AB, BC, CD ecc. sieno proporzionali ai lati *ab*, *bc*, *cd*, ovvero che il lato AB contenga *ab* nella maniera medesima che BC contiene *bc* ecc., ovvero che il lato AB sia tanto grande rispetto ad *ab* quanto è BC rispetto a *bc* ecc., o ancora che vi sia la stessa ragione o lo stesso rapporto tra AB ed *ab* che tra BC e *bc* ecc., o finalmente che AB sia ad *ab* come BC a *bc* ecc. Tutte maniere di esprimere la medesima idea, le quali bisogna rendersi familiari, per intendere la lingua de' Geometri.

XXXVI.

Dopo aver veduto in che consista la similitudine di due figure, cerchiamo quale sia la maniera, che più naturalmente ci si presenta, di descrivere una figura simile ad un'altra. Fingiamo che un disegnatore debba copiare una figura riducendola nello stesso tempo dal grande al piccolo.

Fig. 34.

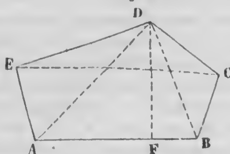
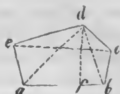


Fig. 35.



Primieramente prendendo *ab* per rappresentare la base AB della figura ABCDE che ha da copiare, egli inclinerà i lati *ae* e *bc* sopra *ab* nella medesima maniera che AE e BC sono inclinati sopra AB, osservando che le lunghezze di *ae* e *bc* sieno a quella di *ab*, come le lunghezze di AE e BC sono a quella di AB; cioè a dire, che se per esempio AE è la metà di AB, farà pure *ae* metà di *ab*; e nel modo medesimo determinerà la lunghezza di *bc* relativamente a BC.

Determinati così i punti *e* e *c*, egli tirerà due rette *ed* e *cd*, inclinate sopra *ea* e sopra *cb*, nella medesima maniera che ED e CD sono inclinate sopra EA e sopra CB; e prolungando queste linee finchè esse s' incontrino in *d*, terminerà così la figura *abcde*.

XXXVII.

Riflettendo ora a questa costruzione, si riconoscerà ch'essa non è appoggiata che sull'egualità che passa tra gli angoli E, A, B, C ed *e*, *a*, *b*, *c*, e sulla proporzionalità de' lati EA, AB, BC co' lati *ea*, *ab*, *bc*, e così si trova la figura compita senza che si sia fatto l'angolo *d* eguale all'angolo D, ed i lati *ed*, *cd* proporzionali a' lati ED, CD. Questa considerazione potrebbe far temere che l'angolo *d* non riuscisse veramente eguale all' angolo D, nè i lati

ed, *cd* proporzionali a' lati ED, CD, e conseguentemente la figura *abcde* non si trovasse simile perfettamente alla figura ABCDE: ma questo dubbio può ben tosto dissiparlo l'esperienza: oltrechè, per poco che vi si attenda, si scorgerà che dall'egualità respettiva de' quattro angoli E, A, B, C ed *eabc*, e dalla proporzionalità de' tre lati EA, AB, BC ed *ea*, *ab*, *bc*, risulta necessariamente l'egualità degli angoli D, *d*, e la proporzionalità de' lati ED, CD ed *ed*, *cd*.

Con tutto ciò, per torre ogni dubbio, facciamo vedere che tutte le condizioni, richieste per la similitudine delle figure, sono necessariamente dipendenti le une dalle altre; il che ci tornerà agevole considerando i triangoli, che sono le figure più semplici, e di cui tutte le altre sono necessariamente composte: e questo esame ci condurrà a conoscere tutte le proprietà e tutti gli usi delle figure simili.

XXXVIII.

Supponghiamo che sulla base *ab* (Fig. 36) si costruisca il triangolo *abc*, facendo gli angoli *cab*, *cba*, rispettivamente uguali agli angoli CAB, CBA del triangolo ABC (Fig. 37); si può dimostrare in primo luogo, che il terzo angolo *acb* sarà uguale al terzo angolo ACB.

Fig. 36.

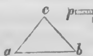
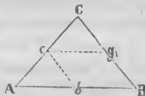


Fig. 37.



Sia infatti collocato il triangolo *abc* sul triangolo ABC, in modo che il punto *a* si trovi sul punto A, *ab* su AB, *ac* su AC, egli è chiaro che il lato *cb* sarà parallelo a CB. Imperocchè se prolungando il lato *cb*, esso venisse ad incontrarsi nel lato CB, ne seguirebbe che questi due lati sarebbero inegual-

mente inclinati sopra AB, cioè che gli angoli *cba* e CBA sarebbero disuguali, la qual cosa è contraria alla supposizione fatta.

Ora, siccome dall'ugualità degli angoli *cba*, CBA, ne segue che le linee *cb*, CB sono parallele; così dal parallelismo di queste ne segue pure che gli angoli *acb*, ACB sono uguali, che è ciò che si doveva dimostrare.

XXXIX.

Si dimostra ancora che ne' due triangoli *acb* e ACB (Fig. 36 e 37), i quali hanno i medesimi angoli, i lati corrispondenti od omologhi sono proporzionali.

Supponiamo, per modo di esempio, che *ab* sia la metà di AB; ci toccherà dimostrare che così pure *ac* sarà la metà di AC, e *bc* la metà di BC. Immaginiamoci il triangolo *acb*, portato in A*cb*, come nell'articolo precedente; se si conduce la *cg* parallela ad AB, è chiaro che questa linea sarà uguale a *b*B, ovvero ad A*b*, e che *g*B sarà pure uguale a *cb*; or siccome gli angoli *cg*C e C*cg* sono rispettivamente uguali agli angoli *cb*A e *c*A*b*, il triangolo C*cg* sarà uguale al triangolo *c*A*b* (art. XXX), dunque si avrà C*c* uguale ad A*c*, e C*g* uguale a *cb*, ovvero a *g*B. Dunque A*c*, ovvero *ac*, sarà la metà di AC, e *cb* la metà di CB.

Fig. 36.

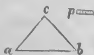
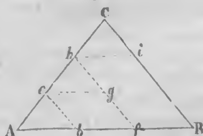


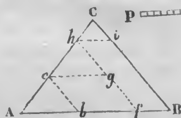
Fig. 38.



Se *ab* (Fig. 36) fosse contenuta tre, quattro o qualsiasi altro numero di volte in AB (Fig. 38), sarebbe egualmente facile di dimostrare che *ac* sarebbe pure contenuta un egual numero di volte in AC,

e cb in CB. Perchè da' punti di divisione b, f, della base AB, tirando bc, fh ecc. parallele a BC, si potranno collocare lungo di AC tre, quattro ecc. triangoli Acb, chg, hCi ecc. eguali al triangolo acb.

Che se ab, in luogo di essere contenuta esattamente un certo numero di volte in AB, non vi fosse contenuta che con qualche frazione, come per esempio due volte e mezza; si proverà che ac sarà pure contenuta due volte e mezza in AC, e bc due volte e mezza in BC.



Infatti, dopo che per mezzo delle parallele bc, fh, si saranno collocati lungo AC i due triangoli Acb, chg, uguali ad abc, si potrà ancora, tra le due parallele hf e CB, collocare un triangolo Chi, i lati del quale saranno la metà de' lati di cAb; poichè, per quel che si è supposto, fB sarà la metà di Ab, e la base hi del triangolo Chi sarà uguale a fB, a cagione delle parallele hf, CB. Dunque in generale quando due triangoli ABC, abc, hanno i medesimi angoli, questi triangoli sono simili ed hanno i loro lati proporzionali, o quel che torna al medesimo, i lati AB, BC, AC d'uno di questi triangoli ABC, contengono tante volte una certa misura P (Fig. 39), quante volte i lati ab, bc, ac dell'altro triangolo abc contengono un'altra misura p (Fig. 36). Essendo P, per cagion d'esempio, il metro, con cui si suppone che siasi misurato il triangolo ABC, sarà p il decimetro, il centimetro, od il millimetro, secondo che il triangolo simile abc

si vorrà costruire in iscala dieci, cento, o mille volte minore (1).

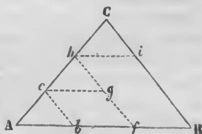
XL.

Da questa proposizione si deduce naturalmente la soluzione di un problema spesso utile nella pratica.

Si dimanda di dividere una retta data in un numero dato di parti uguali. Ciò si potrebbe ottenere col provare e riprovare tante volte, finchè si colga la giusta misura : ma non mai con quella certezza che danno i metodi geometrici.

Supponghiam, per esempio, che si abbia a dividere la retta AB (Fig. 38) in tre parti uguali; si tirerà una retta indefinita AC, che faccia un angolo qualunque con AB, e si porteranno su questa retta tre parti uguali A*c*, *ch*, *h*C, con un'apertura di compasso presa ad arbitrio, indi si tirerà CB, poi *ch*, *hf* parallele a questa linea. Così AB si troverà divisa a' punti *b* ed *f* in tre parti uguali, come chiaramente appare dalla dimostrazione dell'articolo precedente.

Fig. 38.

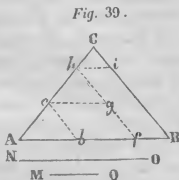


(1) Quando si delinea sulla carta una figura simile a quella di un terreno, come a dire, di un campo, di una selva, di una tenuta, od anche di una città o del suo territorio, in modo da rappresentarne in piccolo tutti gli accidenti, questa figura piccola chiamasi *Piano* o *Tipo*. Per dare a conoscere a chi osserva un Piano la vera grandezza del terreno che si è voluto rappresentare, si segna sulla carta medesima una retta divisa in parti eguali, ognuna delle quali sia contenuta nelle linee o lati del Tipo tante volte, quante volte l'unità di lunghezze di cui si è fatto uso nel misurare il terreno (il metro per esempio) è contenuta ne' lati corrispondenti di questo: e questa retta così divisa dicesi la *Scala* del Piano. Così, se siavi sul terreno una linea lunga 50 metri, e questa sia rappresentata sul Tipo o Piano da una linea lunga 50 centimetri, si segnerà in un angolo della carta una retta o scala divisa in centimetri, e ciascuno di

XLI.

Se si volesse dividere una retta in un tal numero di parti che abbia de' rotti, come due e mezzo, tre e un quarto ecc., ovvero se si proponesse in generale di dividere la linea AB (Fig. 39) in un punto *b*, in modo che AB sia ad A*b*, come la linea NO alla linea MQ, si vede subito che la soluzion del problema dipenderebbe dall' art.° XXXIX, cioè, che bisognerebbe tirare per A una retta qualunque; prendere su questa retta le lunghezze A*c* ed AC, uguali rispettivamente ad MQ e ad NO, e poi tirare CB e la parallela *cb*: ed allora il punto *b* sarà il punto cercato.

Fig. 39.



I Geometri enunciano questo problema così: trovare una linea quarta proporzionale dopo tre linee date NO, MQ ed AB.

XLII.

Egli è evidente che due triangoli simili ABC,

questi rappresenterà una lunghezza di un metro sul terreno: epperò, se misurando col compasso un' altra linea del Piano essa risulterà lunga 23 centimetri, ciò darà a conoscere che la linea corrispondente sul terreno è lunga 23 metri. Un tal piano si direbbe costrutto in iscala di un centimetro per metro, o di un centesimo dal vero, o di uno al cento: esso sarebbe in iscala del millesimo, o di uno al mille, se ciascun millimetro di lunghezza sul piano rappresentasse un metro sul terreno.

Spesse volte invece di disegnare effettivamente sul Piano la scala, questa viene solamente indicata scrivendo sovr' esso che la scala è di uno al cento, o di uno al mille ecc. Così la Carta geografica del Regno pubblicata dallo stato maggiore generale è nelle scale di uno 250000.

abc (Fig.e 40 e 41), avranno non solamente i loro lati proporzionali, ma che le perpendicolari CF, *cf*,

Fig. 40.

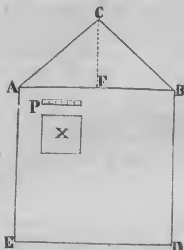
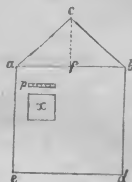


Fig. 41.



abbassate dai vertici C, *c*, sulle basi AB, *ab*, staranno ancora nella stessa proporzione de' lati: ciò è sì facile a dimostrare, che non occorre di fermarvici sopra.

XLIII.

Quanto alle aree de' triangoli simili ABC, *abc* (Fig.e 40 e 41), si vede che quella del primo conterrà tante volte il quadrato X fatto sulla misura P, quante volte l'area del secondo contiene il quadrato *x* fatto sulla misura *p*. Infatti, per l'articolo precedente, CF ed AB conterranno la linea P tante volte, quante *cf* ed *ab* conterranno la linea *p*; la metà del prodotto di CF per AB, misura di ABC (art. XIV), darà dunque il medesimo numero che la metà del prodotto *cf* per *ab*, misura di *abc*; ma CF ed AB essendo state misurate con la linea P, il loro prodotto esprimerà tanti quadrati eguali ad X: dove che *cf* ed *ab*, essendo state misurate con la linea *p*, daranno un prodotto che esprimerà tanti quadrati eguali ad *x*.

XLIV.

Questa proprietà delle aree de' triangoli simili, conduce ad una proposizione, che negli elementi di geometria si suol enunciare così : I triangoli simili ABC, *abc* (Fig.e 40 e 41) stanno tra loro, come

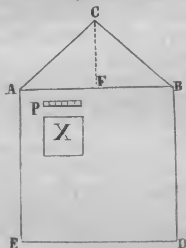


Fig. 40.

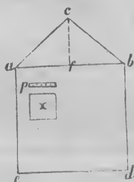


Fig. 41.

i quadrati ABDE, *abde* de' loro lati omologhi o corrispondenti AB, *ab*.

Infatti poichè i due triangoli ABC, *abc* contengono lo stesso numero di volte i quadrati X, *x*, rispettivamente, le aree dei due triangoli staranno tra loro come quelle di questi due quadrati. Similmente i due quadrati ABDE, *abde*, contenendo pure un egual numero di volte i quadrati X, *x*, staranno pure tra loro come questi due quadrati. Dunque finalmente il triangolo ABC starà al triangolo *abc*, come il quadrato ABDE stà al quadrato *abde*.

Ne segue che se per esempio il lato AB sarà doppio del lato *ab*, il triangolo ACB sarà quadruplo del triangolo *acb*: e che se AB sarà triplo di *ab*, il triangolo ACB sarà nove volte maggiore del tri-

angolo *acb* ecc.; perchè AB essendo doppia di *ab*, il quadrato ABDE risulta quadruplo del quadrato *abde* ecc.

XLV.

Per passare da' triangoli alle altre figure, supponghiamo, che a ciascuno de' triangoli simili ABD, *abd* (Fig.^e 34 e 35), si congiungano i triangoli

Fig. 34.

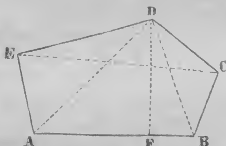
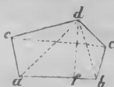


Fig. 35.



simili ADE, *ade*, BDC, *bdc*, si vedrà che nelle figure totali ABCDE, *abcde*,

1.° Gli angoli A, B, C, D, E, saranno rispettivamente eguali agli angoli *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; la qual cosa

Fig. 34.

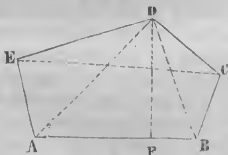
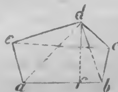


Fig. 35.



è manifesta, poichè questi angoli saranno o angoli corrispondenti di triangoli simili, o composti di angoli corrispondenti.

2.° Che la relazione de' lati omologhi o corrispon-

denti BC, *bc*, DE, *de* ecc. delle due figure ABCDE, *abcde*, sarà la medesima per tutti: cioè se il lato *ab* è contenuto un certo numero di volte in AB, *bc* sarà contenuto lo stesso numero di volte in BC, e *cd* lo stesso numero di volte in CD ecc.

3.° Si vedrà ancora che tirando nelle due figure delle linee corrispondenti, come le diagonali CE, *ce*, o le perpendicolari DF, *df* ecc., queste linee saranno sempre tra loro nella medesima ragione che i lati omologhi delle due figure.

Dunque le figure ABCDE, *abcde*, saranno interamente simili in tutte le loro parti.

XLVI.

Descritta così la figura *abcde*, perfettamente simile alla figura ABCDE, egli è evidente, che se si vorrà di nuovo descrivere una figura del tutto uguale ad *abcde*, e per conseguenza ancora simile ad ABCDE, sarà inutile di misurare tutti i lati e tutti gli angoli di *abcde*, e basterà, (se, per esempio, la data figura è un pentagono), pigliare i tre lati *ab*, *ea*, *bc*, ed i quattro angoli *e*, *a*, *b*, *c*, per esser certi di ricopiare la medesima figura *abcde* simile ad ABCDE; onde riesce dimostrato ciò che si è assunto altrove (art. XXXVII). Ma si può ancora andar più lontano, poichè è chiaro che vi saranno sempre più modi differenti di combinare quel numero di angoli e di linee che si debbono necessariamente misurare in una qualunque figura, per farne un'altra simile. Ma non istancherò i lettori coll'entrare in più minuti particolari.

XLVII.

Si può dimostrare con un ragionamento simile a quello dell'articolo XLIII, che il numero de' quadrati X, contenuti nella figura ABCDE (Fig. 34), è il medesimo che quello de' quadrati *x*, contenuti nella

figura *abcde* (Fig. 35); e così le aree delle figure

Fig. 34.

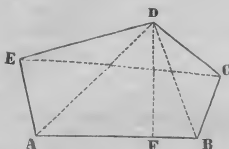


Fig. 34 bis

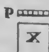


Fig. 35.

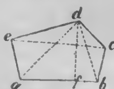


Fig. 35 bis



simili sono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi.

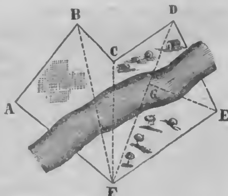
XLVIII.

Tutto quello che abbiamo detto delle figure simili, si può ridurre a questo solo ed unico principio; che le figure simili non differiscono tra loro, che per la scala su cui sono state descritte.

XLIX.

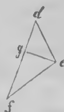
Ora, per meglio vedere l'uso che si dee fare dei triangoli simili, e delle riduzioni in iscala minore, per aver la misura de' terreni, su' quali non si potrebbe commodamente operare, figuriamoci che ABCDEF (Fig. 42) rappresenti il recinto di un parco, di uno stagno ecc., del

Fig. 42.



quale si voglia determinare la superficie. Primieramente si misurerà uno de' lati della figura, per es. FE, e si vedrà quanti metri contenga questo lato; e fatta una scala di parti eguali, di quella grandezza che meglio piacerà, si tirerà sulla carta una linea *fe* (Fig. 43) uguale a tante parti della scala, quanti metri si conterranno in FE: poi facendo gli angoli *def*, *dfe* uguali agli angoli DEF, DFE, si avrà il triangolo *edf*, nel quale si abbasserà *eg* perpendicolare su *df*. Fatto ciò, e misurate per mezzo della scala le linee *df* ed *eg*, si conchiuderà, che quante parti conterranno queste linee, altrettanti metri conterranno DF ed EG. Così moltiplicando DF per la metà di EG, si avrà il valore del triangolo EDF; e misurando nella stessa maniera gli altri triangoli DCF, BCF, ABF, si troverà determinata l'intera area della figura.

Fig. 43.



L.

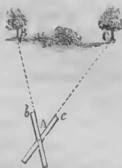
Accade spesso nella pratica di dover misurare la distanza di un luogo F da un altro luogo inaccessibile D: nuovo problema, ma del quale già abbiamo dato anticipatamente la soluzione nell' articolo precedente. Poichè, per misurare la distanza DF, per esempio, basterà valersi della similitudine de' triangoli *def* e DEF; infatti egli è chiaro, che misurata una base qualunque, come EF, se dai punti F ed E si potrà vedere il punto D, si potranno pure misurare gli angoli DEF, DFE, per mezzo dei quali si costruirà un triangolo *def* simile a DEF, ed il problema sarà risoluto; cioè a dire, si avrà la distanza FD.

LI.

L' uso dello strumento descritto nell' articolo XLVIII, e composto di due regoli uniti al punto

A (Fig. 44), intorno al quale essi girano liberamente, può sovente dar luogo a gravi errori, sia perchè l'apertura dell' angolo si altererà nel trasportare lo strumento dal terreno sulla carta; sia perchè la forma che si dovrà dare all' istrumento per facilitarne l' uso, impedirà che possa questo applicarsi sul piano ove dovrà farsi la riduzione.

Fig. 44.

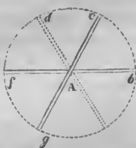


Aggiungiamo a questo, che ogni nuovo angolo BAC, che in questa maniera si prende, richiede che si trasporti di nuovo l'istrumento sulla carta; e l'unico mezzo che esso ci somministra per paragonare tra loro due angoli, è di portarli l'uno sopra l'altro; onde veniam bensì a riconoscere se quegli angoli sono eguali o disuguali, ma non già a scoprire il lor rapporto, nè la lor grandezza assoluta.

LII.

Era dunque necessario di cercare una misura fissa per gli angoli, come una già se n'avea per misurar le lunghezze: e questa fu facile a trovarsi. Infatti tenendo immobile il regolo A*b* (Fig. 45), si faccia prima coincidere con esso l'altro regolo A*c*: poi si faccia girare questo secondo regolo intorno al punto A; è chiaro, che se si pone all' estremità *c* del regolo mobile A*c* una penna od uno stile, in maniera da render sensibile la traccia del movimento del punto *c*, questa traccia, che sarà un arco di circolo, darà l' esatta misura dell' angolo per ciascuna apertura particolare de' lati A*b*, A*c*: cioè a dire, che a cagione dell'uniformità della curvatura del circolo, succederà

Fig. 45.



necessariamente, che ad un'apertura doppia, tripla, quadrupla di cAb, risponderà un arco duplo, triplo, quadruplo di cb.

LIII.

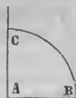
Supponendo dunque che la circonferenza $bcdfg$ (Fig. 45), descritta dalla rivoluzione intera del punto c, sia divisa in un numero qualunque di parti uguali; il numero delle parti comprese tra le linee Ac ed Ab, misurerà esattamente l'apertura di queste linee, o l'angolo cAb, ch'esse formano.

I Geometri sogliono dividere il circolo in 360 parti che chiamano gradi, ciascun grado in 60 minuti, ciascun minuto in 60 secondi ecc. Così un angolo bAc per esempio sarà di 70 gradi, 20 minuti, se l'arco bc, che gli serve di misura, comprenderà 70 delle 360 parti del circolo, e di più 20 sessantesime parti ossia un terzo di un grado.

LIV.

Ne segue che un angolo CAB di 90 gradi, chiamato comunemente angolo retto, è quello, di cui i lati AC e AB comprendono un quarto BC della circonferenza, e sono perpendicolari tra loro.

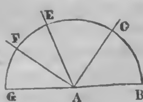
Fig. 46.



LV.

Si chiama angolo acuto ogni angolo che sia più piccolo di un angolo retto, cioè minore di 90 gradi. Tali sono gli angoli CAB, FAG, EAG (Fig. 47).

Fig. 47.



LVI.

Al contrario si chiama angolo ottuso quello che ha più di 90 gradi, come FAB, EAB (Fig. 47).

LVII.

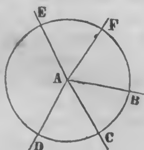
Egli è evidente, che tutti gli angoli, come GAF,

FAE, EAC, CAB (Fig. 47), che si possono fare dalla medesima parte su una retta GB, e che hanno il medesimo vertice A, presi insieme sono eguali a 180 gradi, ovvero a due angoli retti, poichè la loro somma è misurata dalla metà della circonferenza.

LVIII

Così pure la somma di tutti gli angoli EAF, FAB, BAC, CAD, DAE (Fig. 48), che si possono fare intorno ad un punto A, che serve loro di vertice comune, è uguale a 360 gradi, ovvero a quattro angoli retti, poichè è misurata dalla circonferenza intera BCDEF.

Fig. 48.

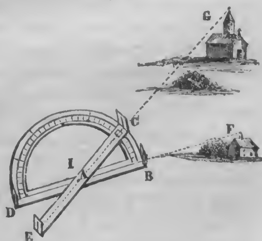


LIX.

Dopo aver trovato che gli angoli possono misurarsi per via di archi di circolo, vediamo come debba procedersi in questa misura, cioè come si operi per vedere quanti gradi contenga un angolo che si ha da misurare.

Si adopra a quest' uso un istrumento, che si chiama semicircolo graduato o *grafometro*. Questo istrumento è composto di due righe EAC, DAB, (Fig. 49), che s' incrociano in A, e che portano ciascuno due *traguardi* o *pinnule* nelle loro estremità: una di queste righe EC è mobile intorno ad A e chiamasi *alidada* o *diottra*, e l'altra è fissa, secondo il

Fig. 49.



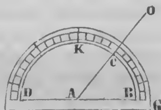
diametro del semicircolo DCB diviso in 180 gradi ecc. (1)

Volendosi misurare l' angolo compreso fra due rette condotte da un punto A a due oggetti qualunque F, G; si colloca lo strumento col suo centro in A, voltandolo in guisa, che l'occhio posto in D, veda uno de' due oggetti pei traguardi D e B: poscia, senza muovere l' istrumento, si gira la riga o diottra mobile CE fintantochè l' occhio collocato in E, veda l' altro oggetto G pei traguardi E e C; ed allora la riga mobile mostra, sul semicircolo diviso in gradi, il numero de' gradi, minuti ecc. che contiene l'angolo proposto GAF.

LX.

Se si vuol segnare sulla carta un angolo di un numero determinato di gradi, si adopra un semicircolo K (Fig. 50), diviso in 180 gradi senza alidada nè pinnule, e posando il centro A sul vertice dell'angolo che si vuol segnare, e la linea AB sulla linea AG, che si prende per uno de' lati dell'angolo, si nota il punto C, che corrisponde al numero de' gradi che si vuol dare all' angolo proposto; poi per questo punto e pel centro A, tirando la linea ACO, si forma l'angolo OAG, che contiene il numero richiesto dei gradi.

Fig. 50.



(1) I traguardi o pinnule sono fessure strettissime e ben diritte intagliate nelle estremità delle righe o diottre EC, DB, ripiegate ad angolo retto sulle righe medesime e sul piano del semicircolo graduato. Quando lo strumento dee servire a misurare angoli compresi tra rette condotte ad oggetti troppo lontani perchè possano bene osservarsi ad occhio nudo, ai due traguardi di ciascuna diottra si sostituisce un cannocchiale.

LXI.

Supponghiamo ora, che avendo preso una base FG (Fig. 52) sulla carta, si voglia fare su questa base un triangolo FGH simile al triangolo ABC (Fig. 51) preso sul terreno; si adoprerà il grafometro per sapere quanti gradi contenga ciascuno degli angoli CAB, CBA; e col semicircolo graduato si faranno gli angoli HFG HGF, rispettivamente uguali a questi: ed allora trovandosi così determinato il punto H, nel quale si uniscono i lati FG e GH, come pure l'angolo FHG, si avrà il triangolo FGH intieramente simile al triangolo ABC.

Fig. 51.

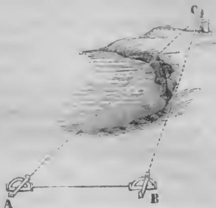
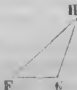


Fig. 52.



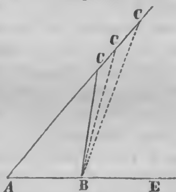
LXII.

Siccome importa moltissimo nella pratica, come abbiamo già detto, che gli angoli sieno esattamente misurati, non basta prendere questa misura cogli strumenti anche più perfetti; bisogna ancora trovare il mezzo di verificarla per correggerla, ove sia necessario. Or questo mezzo è semplice e facile. Infatti nel triangolo ABC (Fig. 51) di leggieri si scorge, che la grandezza dell' angolo C dee dipendere da quella degli angoli A e B. Perchè, secondo che si accresceranno o si sminuiranno questi

angoli, cangerà ancor la posizione delle linee AC, BC, e conseguentemente varierà l'angolo C, che queste linee fanno tra loro. Or se quest'angolo dipende dalla grandezza degli angoli A e B, si può presumere, che il numero de' gradi contenuti negli angoli A e B, dee far conoscere il numero de' gradi che son contenuti nell'angolo C; e così la misura di quest'angolo potrà servire a verificare le operazioni che si saranno fatte per determinare gli angoli A e B; e vi sarà luogo a credere che gli angoli A e B sono stati esattamente misurati, quando l'angolo C risulti di quel numero di gradi appunto che si conviene relativamente alla grandezza degli angoli A e B.

Per comprendere in qual modo dalla grandezza degli angoli A e B, si possa ricavare quella dell' angolo C, consideriamo quel che avverrebbe a quest' angolo, se le linee AC, BC (Fig. 53) si avvicinassero, ovvero si scostassero l' una dall' altra. Supponghiamo, per esempio, che BC, girando intorno al punto B, si scosti da AB per avvicinarsi a BE; dimodochè l'angolo ABC continuamente vada allargandosi; l' angolo C al contrario si stringerà sempre più: la qual cosa dà luogo a dubitare, che in questo caso la diminuzion dell' angolo C sia uguale all' accréscimento dell' angolo B, e che così la somma de' tre angoli A, B, C rimanga sempre la medesima, in tutte le diverse inclinazioni delle linee AC, BC, sopra la linea AE.

Fig. 53.

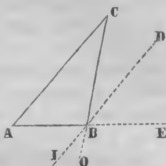


LXIII.

Or questa induzione presunta porta con sè la sua

dimostrazione. Perchè tirando ID, parallela ad AC (Fig. 54), si vedrà primieramente che gli angoli ACB e CBD, chiamati alterni-interni, sono uguali: ciò è evidente, poichè le linee AC e IB essendo parallele, piegheranno egualmente su CBO, e così l' angolo IBO sarà uguale all' angolo ACB. Ma l' angolo IBO sarà anche uguale all'angolo CBD: perchè la linea ID non piegherà più su CO da un lato che dall' altro. Dunque l' angolo DBC uguale all' angolo IBO, sarà uguale all'angolo ACB suo alterno-interno.

Fig 54.



LXIV.

Si vedrà in secondo luogo che l'angolo CAE sarà uguale all' angolo DBE, per causa delle parallele CA e DB. Dunque li tre angoli ABC, CBD, DBE, sono rispettivamente eguali ai tre angoli ABC, ACB, BAC del triangolo; ma i tre angoli ABC, CBD e DBE, presi insieme, sono uguali a due angoli retti (art. LVI): dunque anche la somma de' tre angoli del triangolo è eguale a due retti; e come tutto ciò che abbiam detto può applicarsi a qualunque triangolo, riesce dimostrata questa proprietà generale, cioè che la somma de' tre angoli di un triangolo è costantemente la medesima, ed uguale a due angoli retti, ossia a 180 gradi.

LXV.

Dunque per avere il valore del terzo angolo di un triangolo, quando se ne saranno misurati due, basterà sottrarre da 180 la somma dei gradi contenuti nei due angoli conosciuti. Proprietà, che somministra una maniera assai commoda di verificar la misura degli angoli di un triangolo, e di cui si ve-

dranno infiniti altri usi di mano in mano che andremo innanzi. Contentiamoci qui di trarne le conseguenze più immediate.

LXVI.

Un triangolo non può avere più d'un angolo retto, ed a più forte ragione non può aver più d'un angolo ottuso.

LXVII.

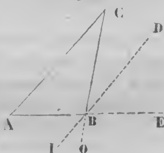
Se uno de' tre angoli di un triangolo è retto, la somma degli altri due angoli è sempre uguale ad un retto.

Queste due proposizioni sono così chiare, che non hanno bisogno di dimostrazione.

LXVIII.

Se si prolunga uno de' lati del triangolo ABC (Fig. 54), per esempio il lato AB, l'angolo esterno CBE sarà uguale alla somma dei due angoli interni opposti BCA, CAB. Perchè all'angolo CBA, o si aggiungano i due angoli BCA e CAB, o l'angolo CBE; la somma sarà sempre uguale a 180 gradi, cioè a due angoli retti (art. LXIV).

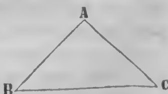
Fig. 54.



LXIX.

Quando si conosce uno degli angoli di un triangolo isoscele ABC (Fig. 55), si conoscono pure gli altri due.

Fig. 55.



Infatti se si conosce l'angolo al vertice A, sottraendo il numero de' gradi che questo contiene da 180, misura di tutti e tre gli angoli del triangolo, la metà della differenza sarà la misura di ciascuno degli angoli alla base B, C.

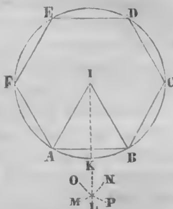
Se l'angolo che si conosce è uno di questi angoli B, C, il doppio del suo valore sottratto da 180 gradi darà l'angolo al vertice A.

LXX.

Il triangolo equilatero non essendo altro che un triangolo isoscele, del quale ciascun lato può prendersi per base, ogni suo angolo è di 60 gradi, cioè eguale alla terza parte di 180.

LXXI.

Fig. 56.



Di qui si ricava facilmente la descrizione dell' esagono regolare o poligono di sei lati, che abbiamo promessa (art. XXIV).

Infatti il lato dell' esagono dovrà essere la corda di un arco di 60 gradi, sesta parte di 360 ossia della intera circonferenza. Supponendo dunque che questa corda sia AB (Fig. 56), e tirando dal centro I, alle estremità A e B, i raggi AI e IB, l' angolo AIB sarà di 60 gradi; e perchè i due lati AI e IB saranno eguali, il triangolo AIB sarà isoscele. Ma l' angolo al vertice essendo di 60 gradi, ciascuno degli altri due angoli sarà pure di 60 gradi, cioè eguale alla metà di 120. Dunque (art. LXX) il triangolo AIB sarà equilatero. Dunque AB sarà uguale al raggio del circolo. Onde segue, che per descrivere un esagono, basta prendere una apertura di compasso uguale al raggio, e portarla sei volte in giro sulla circonferenza, poichè in questo modo si avranno i sei lati dell'esagono.

LXXII.

Descritto l'esagono ABCDEF (Fig. 56), si descri-

verà facilmente il dodecagono, cioè il poligono di dodici lati.

Per ciò fare si dividerà l'arco AKB, ovvero l'angolo AIB in due parti uguali, ed AK, corda della metà dell'arco AKB, sarà uno de' lati del dodecagono.

LXXIII.

Per dividere l'arco AKB (Fig. 56) in due archi uguali AK e KB, si opererà nella medesima maniera, come per dividere la corda AB in due parti uguali; cioè, da' punti A e B come centri, e con un raggio qualunque si descriveranno gli archi MLN, OLP, e pel punto L intersezione de' due archi, e pel centro I, si tirerà la retta LI, la quale dividerà in due parti eguali e l'arco AKB e la corda AB.

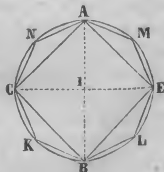
LXXIV.

Ripetendo la stessa operazione, e dividendo l'arco AK in due archi uguali, la corda di uno di questi sarà il lato di un poligono di 24 lati. E così di mano in mano si avranno i poligoni di 48, di 96, di 192 ecc. lati.

LXXV.

Per descrivere un ottagono regolare, cioè un poligono di otto lati, converrà prima descrivere un quadrato dentro il circolo, e ciò si farà col tirare due diametri AIB, CIE (Fig. 57), che si seghino ad angoli retti, e col congiungere le loro estremità, tirando le linee AC, CB, BE, AE.

Fig. 57.



Infatti a cagione della regolarità del circolo, e dell'egualità de' quattro angoli formati dalle perpendicolari AIB, CIE, i quattro lati AC, CB, BE, EA, saranno necessariamente uguali e si troveranno egual-

mente inclinati l'uno verso l'altro, ciò, che non può avvenire che nel quadrato.

Descritto il quadrato, si dividerà col metodo precedente ciascun arco CKB, BLE ecc. in due parti uguali: e condotte le corde AM, ME, EL ecc. si avrà l'ottagono.

Se poi si divide ancora ciascun arco CK, KB ecc., in 2, in 4, in 8 ecc. parti uguali, si avranno i poligoni di 16, di 32, di 64 ecc. lati.

FINE DELLA PARTE PRIMA.

PARTE SECONDA.

DEL METODO GEOMETRICO PEL CONFRONTO DELLE FIGURE RETTILINEE.

Chi abbia posto mente alle cose dette intorno alla via per cui si è potuto trovare il modo di misurare i terreni, dee pure aver notato che le scambievoli posizioni delle linee tra loro somministrano cose degne per se stesse di essere osservate, indipendentemente dall'utile che può ritrarne la pratica; ond' è a credere che queste impegnassero i primi Geometri a spingere più in là le loro scoperte; poichè, non il bisogno soltanto, ma spesso ancora la curiosità trae gli uomini a nuove ed attente ricerche.

E dee pure aver contribuito al progresso della geometria il natural talento di quella precision rigorosa, senza la quale la mente non è mai soddisfatta.

E così, allorchè misurando le figure, i Geometri si sono avveduti che in infiniti casi le scale ed i semicircoli non danno che valori prossimi delle linee o degli angoli, essi hanno dovuto cercar metodi che supplissero al difetto di questi stromenti.

Noi tornerem dunque a considerare le figure rettilinee; ma nelle operazioni che faremo per rinvenire le giuste relazioni che passano tra loro, ci serviremo solamente della riga e del compasso.

Spesso accade o di dover unire in una sola più figure simili, o di risolvere una figura in altre della medesima specie; ma per procedere ordinatamente convien cominciare dai rettangoli: poichè tutte le figure rettilinee sono aggregati di triangoli,

e ciascun triangolo è la metà di un rettangolo, di egual base e di eguale altezza.

I.

Per far confronto di due rettangoli, bisogna saper trasformare un rettangolo qualunque in un altro che abbia egual superficie, ma diversa altezza. Poichè quando due rettangoli si saranno così mutati in due altri che abbiano eguali altezze, non differiranno più in altro che nelle loro basi; più grande sarà quello che avrà base maggiore, ed esso conterrà tante volte il più piccolo, quante volte la sua base conterrà quella del rettangolo minore; la qual cosa suole esprimersi così: Due rettangoli che hanno la medesima altezza, stanno tra loro nella stessa ragione delle basi.

II.

Per sommare due rettangoli di eguale altezza basta collocarli uno a lato all'altro.

III.

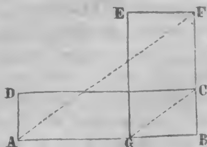
Così pure facilmente si sottrarrà il più piccolo dal più grande.

IV.

E per partire un rettangolo in un numero determinato di rettangoli uguali, basterà dividere la sua base in quello stesso numero di parti uguali, ed innalzare una perpendicolare in ciascun punto di divisione.

V.

Fig. 58.



Sia ora proposto di trasformare il rettangolo ABCD (Fig. 58), in un altro BFEG, che abbia la medesima superficie e l' altezza BF. L'area di qualsivoglia rettangolo avendo per va-

lore il prodotto dell'altezza per la base, è necessario che il rettangolo cercato BFEG, la cui altezza BF è maggiore di BC, abbia la sua base più piccola che AB; cioè, che se BF, per esempio, è doppia di BC, bisogna che BG sia la metà soltanto di AB; se BF è il triplo di BC, BG dee essere il terzo di AB ecc.

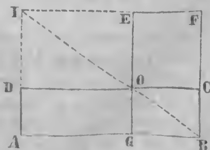
Se poi la BF in luogo di contenere un numero intiero di volte la BC, la contenesse un certo numero di volte, più una frazione, come due volte e un terzo, per fare il rettangolo BFEG di superficie eguale a quella del rettangolo ABCD, sarebbe necessario che la base BG fosse pure contenuta due volte e un terzo dalla base AB. Ed è facile il vedere, che, generalmente affinchè due rettangoli ABCD, BFEG sieno equivalenti, cioè di egual superficie, bisogna che la base BG dell'uno sia contenuta nella base AB dell'altro, come l' altezza BC di questo nell'altezza BF del primo.

Il problema proposto si risolverà dunque dividendo la linea AB in maniera, che AB stia a GB, come BF a BC. Ciò si potrà fare (Parte 1.ª, art. XLI) tirando la linea FA, e dal punto dato C la parallela CG; e GB sarà la base del rettangolo domandato.

VI.

Per trasformare il rettangolo ABCD in un altro rettangolo BFEG (Fig. 59), che abbia un' altezza data BF, si può ancora procedere in modo meno ovvio ma più comodo, operando così: prolungato AD, fino ad incontrare in I la retta FEI condotta pel punto

Fig 59.



F parallelamente ad AB, si tirerà la diagonale BI; e pel punto O, ove questa incontrerà il lato DC, si tirerà GOE parallela a FB; ed il rettangolo BFEG sarà equivalente al rettangolo ABCD.

Infatti, se dal triangolo IAB si tolgono i due triangoli IDO, OGB, si avrà per residuo il rettangolo ADOG: e se dal triangolo IBF eguale ad IAB, si tolgono i triangoli IOE, OBC rispettivamente eguali ad IDO, OGB, si ha per residuo il rettangolo EOCF; dunque i due rettangoli ADOG, EOCF sono equivalenti. Ma al primo di questi rettangoli aggiungendo OCGB, ne risulta il rettangolo dato ABCD; ed al rettangolo EOCF aggiungendo lo stesso OCGB ne risulta il rettangolo EGBF: dunque i due rettangoli ABCD, EGBF sono equivalenti.

VII.

Questa seconda maniera di trasformare un rettangolo in un altro equivalente, conferma il principio che avevamo da prima assunto, e che potea forse sembrare appoggiato ad una semplice induzione.

Dall'egualità de' due rettangoli ABCD, BFEG, si era concluso che AB dovea stare a BG, come BF a BC; la qual cosa possiamo ora dimostrare rigorosamente per via dell'articolo precedente.

Infatti, per esser simili i triangoli IAB e OGB (Fig. 59), la base AB del primo starà alla base GB del secondo, come l'altezza IA all'altezza OG, o come BF, eguale ad IA, stà a BC eguale ad OG. Dunque AB starà a GB come BF a BC, conforme al principio dell'articolo v.

VIII.

Dall' essere equivalenti i due rettangoli ABCD, BFEG, quando l'altezza BF del secondo stà all'altezza BC del primo, come la base AB del primo

alla base BG del secondo, ne risulta pure, che quando quattro linee BF, BC, AB, BG sono tali che la prima stà alla seconda, come la terza alla quarta, il rettangolo che ha per altezza e per base la prima e la quarta di queste linee è equivalente al rettangolo che ha per altezza e per base la seconda e la terza.

IX.

Quando quattro quantità, come le linee predette BF, BC, AB, BG, sono tali, che la prima stà alla seconda come la terza alla quarta, si dice che queste quattro quantità sono in proporzione, o che formano una proporzione. Così 6, 9, 18, 27 sono in proporzione; perchè 6 è contenuto tante volte in 9, quante 18 in 27. Così pure sono in proporzione i quattro numeri 15, 25, 75, 125.

X.

Fra le quattro quantità che formano una proporzione la prima e l'ultima si chiamano i *termini estremi*, o semplicemente gli *estremi*; la seconda e la terza si chiamano i *termini medii*, o semplicemente i *medii*.

Poste queste definizioni, le proposizioni degli articoli VII e VIII si enunzieranno così.

XI.

In ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medii.

XII.

Se quattro quantità sono tali che il prodotto degli estremi sia uguale al prodotto de' medii, queste quattro quantità formano una proporzione.

XIII.

Queste due proposizioni sono di grandissimo uso, e se ne ricava, tra l'altre cose, la dimostrazione della regola che in aritmetica si suol chiamare *Regola*

del tre. Per dare una idea di questa regola, noi ne porgeremo un esempio, che è la miglior maniera di farsi intendere.

Supponghiamo, che 24 lavoratori abbiano fatto 30 metri di lavoro in un determinato tempo; si dimanda quanti metri ne faranno 64 lavoratori in un tempo eguale.

È evidente che per sciogliere il quesito bisogna trovare un numero che stia al 64, nella ragione stessa che il 30 sta al 24. Ora, per l'art. XI, questo numero sarà tale, che il suo prodotto per 24 uguaglierà il prodotto di 30 per 64. Ma il prodotto di 30 per 64 è 1920. Dunque il numero cercato sarà quello, che moltiplicato per 24 dà 1920, e per poco che il lettore conosca la natura delle operazioni dell'aritmetica, facilmente scorgerà che questo numero dee essere il quoziente della divisione di 1920 per 24, cioè a dire 80. I sessantaquattro lavoratori faranno dunque nel tempo indicato ottanta metri di quel lavoro.

In generale per trovare il quarto termine di una proporzione, di cui sieno dati i tre primi, bisogna fare il prodotto del secondo e del terzo cioè dei medii, e dividere questo prodotto pel primo termine della proporzione.

XIV.

L'esempio che abbiamo scelto è così facile ch'esso forse non basterà a rendere manifesta la necessità del metodo precedente, potendo in questo caso il solo naturale accorgimento far trovare il numero cercato. Si vede infatti che il 30 supera il 24 di un quarto, e che così bisogna, che il numero cercato superi pure di un quarto il 64, e questo numero per conseguenza è 80. Ma vi ha de' casi ne' quali più

difficilmente si troverebbe la ragione che passa tra i due primi termini della proporzione.

Per esempio si cerca un quarto proporzionale a questi tre numeri 259, 407, 483.

Per trovarlo, secondo il metodo precedente, si moltiplica 483 per 407, ed il prodotto che è 196581, si divide per 259: si trova così 759 pel quarto termine cercato.

Non si sarebbe potuto trovare in altro modo questo quarto termine, se non per via di tentativi. Vero è che considerando attentamente i numeri proposti si sarebbe venuto a capo di scorgere che 148, eccesso di 407 su 259, contiene quattro settime parti di 259, e che così è necessario aggiungere a 483 il numero 276 che contiene quattro settime parti dello stesso 483. Ma la generalità e la certezza del metodo precedente ci esimono dal dover fare replicati tentativi, i quali molte volte potrebbero riuscire infruttuosi.

XV.

Quando si vorranno sommare insieme due quadrati, si opererà nella medesima maniera come per due rettangoli, i quadrati essendo rettangoli che hanno l'altezza uguale alla base. Si trasformerà dunque uno de' quadrati, per esempio, il più piccolo, in un rettangolo che abbia per altezza il lato del quadrato maggiore, e collocandolo accanto a questo quadrato, le due figure verranno ad unirsi in un rettangolo solo.

XVI.

Si può ancora proporre di formare un quadrato eguale alla somma di due quadrati dati: il qual problema facilmente si risolve nel modo seguente.

Supponghiamo in primo luogo, che i due quadrati

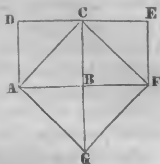


Fig. 60.

ABCD, CBFE (Fig. 60), che vogliono ridursi in un solo quadrato, sieno uguali fra loro; è facile l'avvertire, che segnando le diagonali AC e CF, i triangoli ABC e CBF presi insieme avranno superficie equivalente a quella di uno dei dati quadrati. Dunque trasportando al dissotto di AF i due altri triangoli DCA e CEF, si farà il quadrato ACFG, nel quale il lato AC sarà la diagonale del quadrato ABCD, e che avrà la superficie eguale alla somma di quelle de' due quadrati proposti.

XVII.

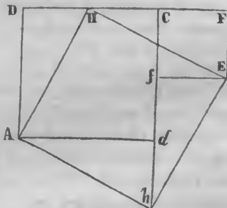


Fig. 61.

Supponghiamo ora che si voglia fare un quadrato uguale alla somma dei due quadrati disuguali ADC*d*, CFE*f* (Fig. 61), ossia trasformare la figura ADFE*fd* in un quadrato equivalente.

Per seguire un metodo analogo a quello che ci è così ben riuscito nel caso particolare che precede, cerchiamo se sia possibile trovare sulla linea DF un punto H, tale

1.° Che tirando le linee AH e HE, e facendo girare i triangoli ADH, EFH attorno i punti A ed E finchè vengano nelle posizioni A*dh*, E*fh*, questi due triangoli si congiungano in *h*.

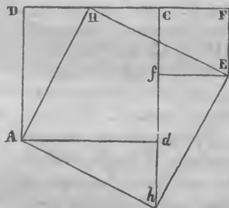
2.° Che i quattro lati AH, HE, E*h*, *h*A sieno eguali, e perpendicolari gli uni agli altri.

Or questo punto H si trova facendo DH uguale al lato CF ovvero EF. Poichè supponendo DH eguale a CF, ne segue primieramente, che se si fa girare ADH attorno al suo angolo A, sinchè prenda la posizione A*dh*, il punto H arrivato in *h*, sarà distante dal punto C per un intervallo uguale a DF.

Ancora: dall'essersi supposti eguali DH e CF, ne segue pure che HF sarà uguale a DC, e così girando il triangolo EFH attorno di E per prendere la posizione E*fh*, il punto H arriverà al medesimo punto *h*, distante da C per un intervallo uguale a DF.

Dunque la figura ADFE*fd* sarà trasformata in una figura di quattro lati AHE*h*. Dunque resta da veder soltanto, se questi quattro lati siano uguali e perpendicolari tra loro.

Fig. 61.



Or l'egualità di questi quattro lati è evidente, poichè A*h* ed *h*E non sono altro che i lati stessi AH e HE trasportati in una nuova posizione; e l'ugualità di questi due ultimi si ricaverà da questo, che essendo DH uguale a CF, ovvero ad FE, ed AD ad HF, i due triangoli ADH, HEF saranno eguali in tutte le loro parti.

Resta finalmente da vedere se i lati della figura AHE*h* formino angoli retti tra loro. Or di ciò è facile l'assicurarsi, riflettendo, che mentre HAD gira attorno di A, per arrivare in *h*A*d*, di necessità il lato AH dee descrivere un angolo eguale a quello descritto dal lato AD. Or il lato AD fa un angolo

retto DA*d* passando in A*d*. Dunque il lato AH farà pure un angolo retto HA*h* passando in A*h*.

Quanto agli altri angoli H, E, *h*, si vede pure, che debbono esser retti; poichè non è possibile che una figura, terminata da quattro lati uguali, abbia un angolo retto, senza che gli altri tre riescano parimente retti.

XVIII.

Se ora si osserva, che i due quadrati ADC*d*, CFE*f* hanno per lati rispettivamente i due lati minori AD, e DH del triangolo rettangolo ADH, e che il quadrato AHE*h*, uguale alla somma degli altri due, è descritto sul lato maggiore AH del medesimo triangolo, il qual lato si nomina comunemente *l' ipotenusa* del triangolo rettangolo, verrà a scoprirsi questa famosa proprietà de' triangoli rettangoli; che il quadrato dell' ipotenusa è uguale alla somma de' quadrati fatti sugli altri due lati. Questi altri due lati si sogliono chiamare i *cateti*.

XIX.

Dunque allorchè si vorrà fare un quadrato equivalente a due quadrati HDKL, ABCD (Fig. 62 e 63), sarà inutile di metterli a lato uno all'altro, e di scomporli, come s'è fatto nell'articolo XVII. Basterà portare i loro lati in AD, DH (Fig. 64), in modo che facciano un angolo retto, e tirare la linea AH: poichè questa linea sarà il lato del quadrato cercato AHIE, eguale alla somma dei due quadrati proposti.

Fig. 62.

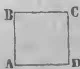


Fig. 63.

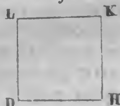
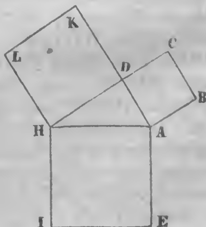


Fig. 64.



XX.

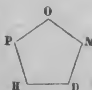


Fig. 65

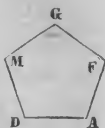


Fig. 66

Date due figure simili DAFGM, DHPON (Fig. 65 e 66), se si vorrà farne una terza simile alle prime, ed uguale in superficie alla somma di esse, basterà portare le basi AD, DH di queste figure su i due lati di un angolo retto ADH (Fig. 67), e l'ipotenusa AH del triangolo ADH sarà la base della figura cercata.

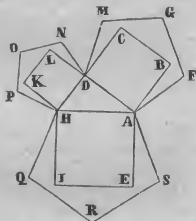


Fig. 67.

Per comprendere la ragione di questo precetto, si costruiscano i quadrati ABCD, DHKL, AHIE sulle basi delle tre figure simili; risulta dall' art. XVIII, che il quadrato AHIE sarà eguale alla somma dei due altri quadrati ABCD, DHKL. Or le figure simili sono tra loro, come i quadrati de' loro lati omologhi (Parte 1.ª, art. XLVII): dunque il quadrato ABCD sarà contenuto tante volte nella figura DAFGM, quante volte è il quadrato DHKL nella figura DHPON, ed il quadrato AHIE nella AHQRS; onde facilmente si conchiude, che la figura AHQRS sarà uguale alla somma delle altre due. Supponghiam, per esempio, che ciascuno di questi quadrati sia la metà della figura nella quale è compreso; nessuno dubiterà, che la figura AHQRS non sia eguale alla somma delle altre due, poichè la sua metà sola è uguale alla metà delle due figure

DHPON, DAFGM. Il medesimo succederebbe se i quadrati ABCD, DHKL, AHIE fossero i due terzi, i tre quarti ecc. delle figure DAFGM, DHPON, AHQRS.

XXI.

Se si vorranno unire in una somma tre, quattro ecc. figure simili, o quel che è lo stesso, tre, quattro ecc. quadrati, il metodo sarà sempre il medesimo. Quando si voglia, per es., sommarne tre, si faccia un quadrato uguale alla somma dei due primi; poi questo nuovo quadrato si sommi col terzo; e così si avrà un quadrato uguale alla somma dei tre quadrati proposti.

XXII.

Ne segue che per fare un quadrato cinque, sei ecc. volte più grande di un altro, basta seguire il metodo precedente; pel problema inverso poi, cioè per fare un quadrato che sia la quinta, la sesta ecc. parte di un quadrato proposto, varrebbe ancora lo stesso modo, purchè si ricordasse la maniera data per trovare una quarta proporzionale a tre linee date. Ma nella terza parte di questa opera daremo un metodo più diretto e più comodo per sciogliere questa specie di problemi.

XXIII.

L'addizione delle figure simili ci somministra una prova irrecusabile della necessità di abbandonare l'uso delle scale, quando si vogliano fare le operazioni in modo suscettivo di rigorosa dimostrazione.

Fingiamo, per esempio, che si abbia da fare un quadrato doppio di un altro. Chi ignorasse il metodo dell'art. XVI, dovrebbe attenersi a quello che segue:

Egli dividerebbe il lato del quadrato dato in un gran numero di parti: per esempio in 100. Moltiplicherebbe 100 per 100, e troverebbe 10000 pel

valore dell' area del dato quadrato; epperò sarebbe 20000 il valore dell'area del quadrato domandato.

Ma dal valore di quest' area non se ne ricaverebbe tuttavia la maniera di descrivere il quadrato richiesto. Sarebbe necessario ancora conoscere il suo lato espresso per un numero, il quale dovrebbe esser tale, che multiplicandolo per se medesimo, o come si suol dire, quadrandolo, il prodotto desse 20000.

Or vano sarebbe il cercare questo numero, poichè 141 moltiplicato per se medesimo darà 19881 che è minore di 20000, e 142 darà 20164 che è maggiore di 20000; e però i numeri 141 e 142 sono il primo minore, il secondo maggiore di quello che si vorrebbe trovare.

Altri potrà forse darsi a credere, che dividendo il lato del quadrato proposto in più di 100 parti, si possa trovare pel lato del quadrato di superficie doppia del primo, un numero intero di quelle parti. Ma qualunque prova si faccia, si troverà sempre di aver cercato indarno due numeri, de' quali uno esprima il lato (o come si suol dire *la radice*) di un quadrato, e l' altro il lato ovvero la radice di un quadrato doppio del primo.

XXIV.

Di fatti si dimostra in aritmetica, che se due numeri non sono multipli l'uno dell'altro, cioè se uno non contiene l'altro un numero intero di volte, il quadrato del più grande non sarà nè pure multiplo del quadrato del più piccolo. Così, per esempio 5, non potendosi dividere esattamente per 4, il suo quadrato 25 non può neppure dividersi esattamente per 16 quadrato di 4.

Facendo dunque i quadrati di due numeri, dei quali uno sia più grande dell' altro, ma men che doppio di esso, si otterranno due altri numeri,

de' quali uno sarà minore del quadruplo dell'altro, ma che non potrà mai essere nè il doppio nè il triplo di esso. Dunque ancora se si divide il lato di un quadrato in qual numero di parti si voglia, il lato del quadrato doppio, che, secondo quello che si è dimostrato nell'articolo XVI, sarà la diagonale di questo quadrato, non conterrà un numero intero di queste parti: la qual cosa si esprime nel linguaggio geometrico dicendo, che il lato del quadrato e la sua diagonale sono *incommensurabili*.

XXV.

Si può di più osservare, che vi ha una infinità di altre linee che non hanno alcuna comune misura; perchè se si scrivono le due serie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ecc.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 ecc.

la prima delle quali esprime i numeri naturali, e l'altra i loro quadrati, si vede che come i numeri che sono tra il 5 ed il 9, tra il 9 ed il 16, tra il 16 ed il 25, ecc. non hanno alcuna radice esatta, così i lati di due quadrati, de' quali l'uno sia triplo, o quintuplo, o sestuplo ecc. dell'altro, sono incommensurabili tra loro.

XXVI.

Dall'essere alcune linee incommensurabili rispetto ad altre, potrà forse alcuno rivocare in dubbio l'esattezza delle dimostrazioni, di cui ci siamo serviti a provare la proporzionalità delle figure simili. Perchè paragonando queste figure (Part. 1.ª art. XXXIV e seg.) noi abbiamo sempre ammesso che esistesse una scala, atta a misurarne tutte le parti: la qual supposizione sembrerà non potersi generalmente ammettere a motivo di quel che ora abbiamo detto. Bisogna dunque che ci rifacciamo sulle nostre stesse

pedate a fin di ricercare, se le nostre proposizioni reggano tuttavia, o se debbano essere in alcuna parte emendate.

XXVII.

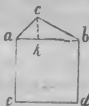


Fig. 68.

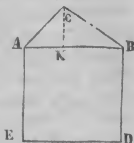


Fig. 69.

E cominciando dalle cose dette nell'art. XXXIX della prima parte, veggiamo se sia vero assolutamente che due triangoli, come *abc*, ABC (Fig. 68 e 69), che hanno gli stessi angoli, abbiano i loro lati proporzionali. Supponghiamo per esempio che essendo *ab* la base del primo, quella del secondo sia una retta AB, uguale alla diagonale di un quadrato del quale *ab* sia il lato, e cerchiamo se in questo supposto la ragione di AC ad *ac* sarà la medesima che quella di AB ad *ab*.

Ancorchè non possa dubitarsi che per quanto grande sia il numero delle parti in cui si supporrà divisa la linea *ab*, la AB non potrà mai contenere esattamente un numero intero di queste parti; con tutto ciò facilmente si comprende, che quanto più grande sarà questo numero, tanto più AB si approssimerà a poter essere esattamente misurata dalle parti di *ab*. Supponghiamo *ab* divisa in 100 parti; il numero di queste parti contenute in AB, si troverà compreso tra 141 e 142 (art. XXIII). Contentiamoci di 141, e trascuriamo il piccolo residuo. È chiaro (Part. 1.ª art. XXXIX) che AC pure conterrà 141 centesime parti di *ac*.

Supponghiamo ora *ab* divisa in 1000 parti; il numero di queste parti che si conterranno in AB sarà compreso tra 1414 e 1415. Prendiamo 1414 e trascuriamo il residuo. Si troverà medesimamente

che AC conterrà 1414 millesime parti di *ac*; ed in generale AC conterrà sempre altrettante parti di *ac* con un residuo, quante parti di *ab* si conterranno in AB, con un residuo.

Inoltre questi residui, come abbiamo osservato, saranno tanto più piccoli, quanto il numero delle parti *ab* sarà più grande. Sarà dunque permesso di trascurare questo residuo, se s'immagina la divisione di *ab* portata all'infinito, ed allora si potrà dire, che il numero delle parti di *ac*, contenute in AC, sarà uguale al numero delle parti di *ab* contenute in AB, e che così AC sarà ad *ac*, come AB ad *ab*.

Egli è dunque rigorosamente dimostrato che quando due triangoli hanno i medesimi angoli, essi hanno ancora i lati proporzionali, abbiano o non abbiano questi una comune misura.

La proposizione (Parte 1.ª art. XLV), per cui si stabilisce la proporzionabilità dei lati omologhi nelle figure simili, si giustifica nel modo medesimo.

XXVIII.

Col mezzo di simili ragionamenti si vedrà pure che le proposizioni spiegate negli articoli XLIV e XLVII della prima parte, nelle quali si è mostrato, che le aree de' triangoli e delle altre figure simili stanno tra loro come i quadrati de' lati omologhi, sono in generale sempre vere, quand'anche i lati di queste figure sieno incommensurabili.

Fig. 68

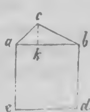
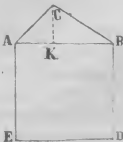


Fig. 69.



Prendiamo per esempio i triangoli simili *abc*, ABC (Fig. 68 e 69), dei quali supporremo le altezze incommensurabili colle basi. In questo caso non vi sarà alcun quadrato, per quanto sia piccolo, che

possa servire di misura comune a questi triangoli, ed a' quadrati fatti sulle loro basi; cioè a dire, che le aree *abc* ed *abde* saranno incommensurabili tra loro, e così pure le aree ABC ed ABDE; ma non sarà men vero tuttavia che il triangolo ABC starà al quadrato ABDE, come il triangolo *abc* al quadrato *abde*.

Ciò si dimostra osservando, che quanto più le parti della scala, di cui si farà uso per misurare AB e CF saranno piccole, e più potranno trovarsi numeri approssimati che esprimano la ragione di ABC ad ABDE. Dunque dividendo sempre la base *ab* del triangolo *abc* nel medesimo numero di parti in cui si divide la base AB del triangolo ABC, e trascurando i residui, si vedrà che i medesimi numeri serviranno sempre ad esprimere il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e quello del triangolo *abc* al quadrato *abde*. Spingendo col pensiero la division della scala fino all'infinito, i residui diventeranno assolutamente nulli; e si potrà dire, che i numeri i quali esprimeranno il rapporto del triangolo *abc* al quadrato *abde*, esprimeranno pure il rapporto del triangolo ABC al quadrato ABDE, e che così il triangolo *abc* starà al quadrato *abde*, come il triangolo ABC al quadrato ABDE.

Il medesimo avverrà per tutte le figure simili.

FINE DELLA SECONDA PARTE.

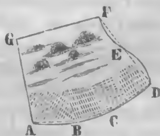
PARTE TERZA.

DELLA MISURA DELLE FIGURE CIRCOLARI, E DELLE LORO PROPRIETÀ.

Trovate le regole per misurare qualsivoglia figura rettilinea, i Geometri han pur voluto ricercare il modo di misurar quelle che son limitate da linee curve. I terreni, ed in generale gli spazii, de' quali si cerca la misura, non sono sempre terminati da linee rette.

Vero è che pei bisogni della pratica le figure curvilinee, e le figure mistilinee, cioè limitate in parte da linee rette, ed in parte da linee curve, si possono ridurre a figure tutte rettilinee, come già abbiamo detto. Poichè per misurare una figura come ABCDEFG (Fig. 70), si può riguardare il lato AD come formato dalla unione di due, di tre ecc. linee rette; poi sostituendo la retta FD alla curva FED, si ha la figura rettilinea ABCDFG, la quale sì poco differisce dalla figura data, che senza error sensibile può riguardarsi come ad essa equivalente, e misurarsi coi metodi finqui insegnati.

Fig. 70.



Ma i Geometri non rimarranno soddisfatti di questo modo di operare: essi vogliono operazioni

rigorose, e vi sono inoltre de' casi, ne' quali la trasformazione di una figura curvilinea o mistilinea in una figura tutta rettilinea richiederebbe, che il suo contorno si dividesse in un numero così grande di parti, che il metodo indicato riuscirebbe impraticabile. Così non converrebbe attenersi a questo metodo, quando si dovesse misurare, per esempio, la figura Z (Fig. 76), ovvero l'intiero circolo X (Fig. 72). Bisognerà dunque prendere un'altra strada per trovare la misura di questa sorte di spazii. Noi parleremo soltanto di quelli, il contorno de' quali non contiene altre curve che archi di circolo.

Fig. 72.

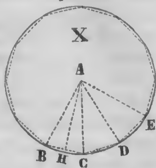
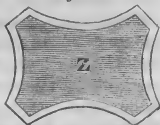


Fig. 76.



I.

Supponghiamo che s'abbia a misurare l'area del circolo X (Fig. 72). Si osserverà, che iscrivendo in esso un poligono regolare BCDE ecc., quanto maggiore sarà il numero de' lati di questo poligono, tanto più esso si approssimerà al circolo. Ora si è veduto che l'area di qualsivoglia poligono regolare (Parte 1.ª, art. XXII) è uguale a tante volte il prodotto del lato BC, per la metà dell'apotema AH, quanti sono i lati del poligono; o, in altre parole, che quest'area ha per misura il prodotto del contorno intiero BCDE ecc. per la metà dell'apotema. Dunque, poichè accrescendo all' infinito il numero de' lati del poligono, la sua area, il suo contorno ed il suo apotema uguaglieranno l'area, il contorno ed il raggio del circolo, così l'area di questo avrà per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.

II.



Ne segue, che la superficie di un circolo BCD (Fig. 73) equivale a quella di un triangolo ABL, che abbia per altezza il raggio AB, e per base una retta BL, eguale alla circonferenza BCD.

III.

Per misurare la superficie di un circolo basta dunque conoscerne il raggio e la circonferenza. Il raggio facilmente si misura: non così la circonferenza. Tuttavia per molti usi pratici si potrà inviluppare un filo intorno al circolo, e prendere la lunghezza di questo filo disteso in linea retta per misura della circonferenza.

Fin ad ora non si è potuto misurare geometricamente la circonferenza del circolo, cioè determinare esattamente la ragione, che essa ha al raggio. Si trova bensì questa ragione approssimata fino ai centomillesimi, ai millionesimi, o generalmente, con errore quanto piccolo si voglia, ma senza poterne però determinar rigorosamente il valore.

IV.

L'approssimazione più semplice, che si sia trovata, è quella di Archimede. Diviso il diametro in sette parti, la circonferenza contiene più che 21 e meno che 22 di queste parti: e la giusta misura è più vicina alle 22 che alle 21.

V.

Del resto egli è chiaro, che se si conoscesse esattamente la ragione della circonferenza di un dato

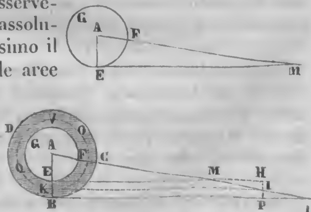
circolo al suo raggio, si conoscerebbe pure quella di qualsivoglia altra circonferenza al suo raggio, dovendo questa ragione essere la medesima in tutti i circoli. Infatti è chiaro, che tutte le operazioni, che si saranno fatte per misurare una circonferenza in parti del suo raggio, si dovranno ripetere precisamente nello stesso modo per misurare qualunque altra circonferenza; e che così si troverà per tutte le circonferenze lo stesso numero di parti dei loro rispettivi raggi.

VI.

Egli è evidente, che i circoli debbon pur godere della proprietà generale di tutte le figure simili (Parte I.ª, art. XLVII), voglio dire, che le loro superficie staranno fra loro come i quadrati delle loro dimensioni omologhe; ma siccome i circoli, propriamente parlando, non hanno lati, invece di questi si debbono considerare i loro raggi: cioè, insomma, le aree di circoli sono proporzionali ai quadrati de' loro raggi.

Se non paresse evidente, che questa proposizione è conseguenza delle cose dette nell' art. XLVII della prima parte, e se ne volesse una dimostrazione particolare, si osserverebbe, che torna assolutamente al medesimo il far confronto delle aree dei due circoli BCD, EFG (Fig. 74 e 75), ovvero di quelle de' triangoli ABL, AEM, che hanno per basi le rette BL

Fig. 74 e 75.



e EM, eguali alle circonferenze BCD, EFG sviluppate, e per altezze i raggi AB ed AE; poichè le aree di questi triangoli sono rispettivamente equivalenti a quelle de' circoli BCD, EFG. Or per l'articolo citato questi triangoli stanno tra loro come i quadrati de' loro lati omologhi AB, AE, raggi dei circoli BCD ed EFG ecc. Dunque ecc.

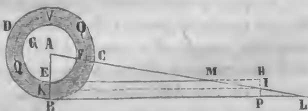
VII.

I circoli a cagione della loro similitudine godono, come tutte le altre figure simili, della proprietà, che prendendo i tre lati di un triangolo rettangolo per raggi, e descrivendo tre circoli, quello che avrà per raggio l'ipotenusa, eguaglierà i due altri presi insieme.

Così si potrà sempre trovare un circolo uguale alla somma di due circoli dati, senza dover misurare ciascuno di questi circoli. Se si volesse, per es., fare una vasca circolare, la quale contenga tant'acqua quanta ne contengono due altre vasche circolari della stessa profondità, si otterrebbe facilmente l'intento col mezzo dato.

VIII.

Fig. 75.



Se si avrà da misurare la superficie di una corona V (Fig. 75), compresa tra due circoli concentrici EFG, BCD, cioè tra due circoli che hanno lo stesso centro, il primo pensiero che si presenterà sarà di misurare separatamente le superficie de' due circoli, e di sottrarre la più piccola dalla più grande. Ma è facile accorgersi, che il problema si può risolvere in modo più spedito.

Immaginiamo infatti un triangolo ABL, che abbia per altezza il raggio AB, e per base la retta BL uguale alla circonferenza BCD. Tirando pel punto E la retta EM parallela a BL, questa retta sarà uguale alla circonferenza EFG; poichè, a cagione della similitudine de' triangoli AEM, ABL, vi sarà la medesima proporzione tra AB e BL, che tra AE ed EM. Or per ipotesi BL sarà uguale alla circonferenza, di cui AB è il raggio. Dunque EM uguaglierà la circonferenza, che avrà per raggio la linea AE. E similmente ogni altra linea KI parallela a BL sarà sempre eguale alla circonferenza della quale il raggio sia AK.

Dall'ugualità tra la circonferenza EFG e la retta EM, ne segue necessariamente che la superficie del triangolo AEM è eguale a quella del circolo EFG. Dunque lo spazio rettilineo EBLM sarà uguale all'anello proposto V. Ma questo spazio EBLM si può ancora facilmente cangiare in un rettangolo EBPH, dividendo ML in due parti uguali MI e IL, e tirando pel punto I la retta HIP perpendicolare alla BL, poichè il triangolo aggiunto MHI sarà manifestamente uguale al triangolo sottratto PLI.

Dunque se pel punto I si tira la IK parallela a BL, la quale dividerà EB in due parti uguali, l'anello proposto eguale allo spazio EBLM, ovvero a EBPH, avrà per misura il prodotto EB per KI, circonferenza, di cui AK sarà il raggio.

Dunque per misurare l' anello V, bisogna moltiplicare la sua larghezza EB per la circonferenza KOQ descritta col raggio AK, medio aritmetico tra AE ed AB, cioè tale che di tanto supera il primo AE, di quanto è superato dal secondo AB.

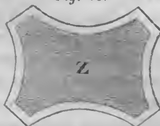
IX.

Se si trattasse di misurare una figura Y (Fig. 71) chiusa da archi circolari e da linee rette, ovvero una figura Z (Fig. 76) tutta chiusa da archi di circolo, la difficoltà si ridurrebbe a misurare segmenti di circolo, cioè spazii, come ABCE (Fig. 77) terminati da un arco ABC, e dalla corda AC. Perchè le figure intieramente limitate da archi di circolo, ovvero da archi e da linee rette, possono tutte esser considerate come figure rettilinee accresciute o diminuite di alcuni segmenti.

Fig. 71.



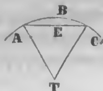
Fig. 76.



X.

La misura di un segmento qualunque ABCE (Fig. 77) è facile a trovare, allorchè si sa quella del circolo. Perchè tirando le linee AT, CT al centro T dell' arco, si formerà una figura ABCT chiamata settore, di cui l'area sarà al circolo come l'arco ABC all'intiera circonferenza, e che per conseguenza avrà per misura il prodotto della metà del raggio AT per l' arco ABC. Misurato così il settore, sottraendone il triangolo ACT, si avrà la misura del segmento ABCE.

Fig. 77.

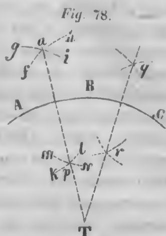


XI.

Spesso accade di dover misurare una figura come Y (Fig. 71), limitata da un arco HIK di cui non sia dato il centro; or senza conoscere questo centro non si può misurar la figura, perchè il metodo precedente esige che si conosca il raggio. Proponiamoci dunque

ora di trovare il centro di un arco di circolo qualunque.

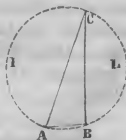
Sia ABC (Fig. 78) l'arco di circolo proposto; presi ad arbitrio due punti A e B su quest' arco, da questi punti, come centri, si descrivano i quattro archi *gai*, *fah*, *lpk*, *mpn*, i due primi con uno stesso raggio preso ad arbitrio, ed i due altri col medesimo raggio o con un altro raggio qualunque; è chiaro, che il centro cercato dell'arco ABC sarà sulla retta *op*, che congiunge i punti d'intersezione *a*, *p*.


Fig. 78.

Scegliendo poscia un terzo punto C sull'arco ABC, ed operando sui punti B, C, come s'è fatto sui punti A, B, si avrà un' altra retta *qr*, sulla quale dovrà ancora trovarsi il centro domandato. Dunque questo centro sarà il punto T, dove s'incontrano le linee *ap*, *qr*.

XII.

Così, comunque si collochino tre punti, purchè non sieno in linea retta, si potrà sempre far passare un arco di circolo per questi tre punti; o, quel ch'è l'istesso, qualunque sia la ragion de' lati AB, AC, BC di un triangolo ACB (Fig. 79), si potrà sempre circoscrivere un circolo a questo triangolo.


Fig. 79.

XIII.

Il metodo dato per circoscrivere un circolo a un triangolo applicato successivamente a diversi trian-

goli ACB, AEB, AGB (Fig. 80), più o meno alti rispetto alla lor base AB, mostrerà, che passando da un triangolo ACB, che abbia l'angolo al vertice molto acuto, ad altri triangoli AEB, AGB, che abbiano l'angolo al vertice più aperto, il centro del circolo circoscritto continuamente s'accosta ad AB, e che questo centro passa al dissotto di AB, quando l'angolo al vertice AGB ha una certa apertura. Or vedendo questo centro passare al dissotto di AB per certi triangoli, dopo aver veduto che per altri esso trovasi al di sopra della base stessa AB, si dee provare il desiderio di sapere quale sia il triangolo AFB (Fig. 81), per cui il circolo circoscritto ha il suo centro sulla stessa AB.

Fig 80.

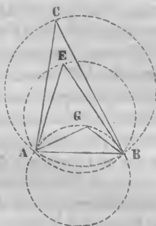
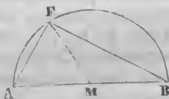


Fig. 81.



Notiamo, che in questo caso particolare, la porzione del circolo circoscritto al triangolo deve essere un semicircolo; poichè trovandosi il centro sulla base AB, le estremità della quale sono, secondo l'ipotesi, nella circonferenza, il centro M dovrà essere situato nel punto di mezzo di AB, epperò questa retta sarà un diametro del circolo.

Notiamo ancora, che se da qualunque punto F del semicircolo si conducono le linee FA, FB, l'angolo AFB sarà retto. Perchè tirando FM, i due triangoli AFM, MFB saranno isosceli: dunque li due angoli AFM, MFB saranno rispettivamente uguali

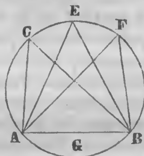
agli angoli FAM, FBM, o quello che torna allo stesso, l'angolo totale AFB uguaglierà la somma dei due angoli FAM, FBM; ma i tre angoli AFB, FAM, FBM presi insieme sono uguali a due retti: dunque l'angolo AFB sarà retto.

Così dunque, se si descrive sopra una base qualunque AB un triangolo rettangolo, questo triangolo avrà la proprietà di essere iscritto in un circolo, il centro del quale è sulla base.

XIV.

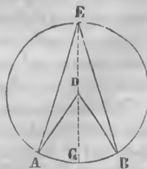
Questa proprietà del circolo, per cui tutti gli angoli che hanno il vertice sulla semicirconferenza e che s'appoggiano sul diametro sono retti, porta a cercare, se gli archi di circolo maggiori o minori della semicirconferenza, abbiano qualche proprietà analoga; se, per esempio, gli angoli ACB, AEB, AFB (Fig. 82), inscritti nel segmento ACEFB, sieno uguali tra loro, come sono quelli inscritti nel semicircolo.

Fig. 82.



Per assicurarcene, cercheremo prima il valore di uno di questi angoli, e vedremo poi se gli altri abbiano il medesimo valore. Prendiamo, per esempio, l'angolo AEB (Fig. 83), il cui vertice E trovasi sul mezzo dell'arco AEB. Siccome la linea EDG, che passa pel centro D, divide quest'angolo in due parti uguali AEG, GEB, basterà misurare l' angolo AEG, ossia, basterà sapere qual parte sia l'angolo AEG di un altro angolo già misurato, per esempio, dell'angolo ADG. Dico che

Fig. 83.



quest'angolo ADG è già misurato, poichè sappiamo ch'esso ha per misura l'arco AG (Parte I.ª, art. LII).

Ora, il triangolo AED essendo isoscele, l'angolo AEG è la metà dell'angolo ADG. Infatti gli angoli AED, EAD (Parte I.ª, art. XXXI) sono uguali; ma (Parte I.ª, art. LXVIII) questi due angoli presi insieme sono uguali all'angolo esterno ADG. Dunque l'angolo AED, ovvero AEG, è la metà dell'angolo ADG.

Per la medesima ragione l'angolo DEB sarà la metà dell'angolo GDB. Dunque l'angolo totale AEB sarà uguale alla metà dell'angolo ADB. Dunque la sua misura sarà la metà dell'arco AGB.

XV.

Misurato così l'angolo AEB (Fig. 83), per sapere se esso è uguale a qualsivoglia altro angolo inscritto nel medesimo segmento, bisogna esaminare, se un tal angolo preso ad arbitrio, per esempio AFB (Fig. 84), sia esso pure la metà dell'angolo al centro ADB. Di ciò è facile assicurarsi, tirando pel centro la retta FDG, poichè si vedrà, che l'angolo AFB sarà composto di due altri AFG, GFB, che saranno per l'articolo precedente metà degli angoli ADG, GDB: onde si concluderà, che l'angolo totale AFB, sarà la metà dell'angolo ADB. Applicando lo stesso discorso a tutti gli angoli ACB, AEB, AFB (Fig. 82), i quali hanno il loro vertice alla circonferenza, e che posano sul medesimo arco AGB, si dovrà concludere, che questi angoli sono tra loro uguali,

Fig. 84.

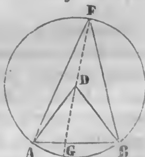


Fig. 82.

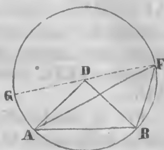


come avevamo congetturato nell' articolo precedente.

XVI.

Tra gli angoli che hanno il vertice nell' arco ACEFB (Fig. 84) ve ne ha di quelli, de' quali potrebbe dubitarsi se siano compresi nella dimostrazione precedente. Tali sono gli angoli come AFB (Fig. 85), pei quali la retta FDG, tirata pel centro, non è contenuta nell'angolo ADB. Tuttavia, notando sempre, che l'angolo GFA è la metà dell'angolo GDA, e l'angolo GFB la metà dell'angolo GDB, si vedrà, che l'angolo AFB, eccesso dell'angolo GFB sopra l'angolo GFA, sarà pure la metà dell'angolo ADB, eccesso dell'angolo GDB sopra a GDA.

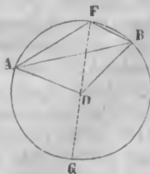
Fig. 85.



XVII.

Secondo le figure, di cui ci siamo fin ora serviti, potrebbe credersi che la dimostrazione precedente valga soltanto pei segmenti maggiori del semicircolo; ma è facile il vedere, che qualunque angolo AFB (Fig. 86), inscritto in un segmento minore del semicircolo, sarà sempre composto di due altri GFB, GFA, metà degli angoli BDG, ADG rispettivamente: e che per conseguenza quest' angolo AFB avrà per misura la metà della somma de' due archi BG, AG, cioè a dire la metà dell'arco AGB (1).

Fig. 86.



(1) Dopo di aver veduto, che gli angoli AEB, AFB, AHB

XVIII.

Una retta la quale come la SBH (Fig. 88) tocchi la circonferenza in un punto B, senza penetrare nell'interno del circolo, epperò senza incontrare la circonferenza in verun altro punto, si chiama *tangente*.

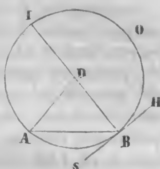


Fig. 88.

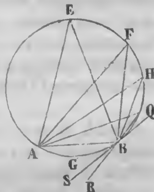


Fig. 87.

(Fig. 87), inscritti in un medesimo segmento, sono tutti eguali, si è pur voluto ricercare che cosa diventi l'angolo AQB, allorchè il suo vertice si confonde col punto B, estremità della base AB; svanisce egli allora quest'angolo? Ma non par possibile, ch'esso venga tutto in un tratto ad annientarsi senza ristringersi grado grado: e non si vede, quale sarà il punto, oltre il quale quest'angolo cesserà di esistere: come dunque arriveremo noi a trovarne la misura? Questa è una difficoltà, che non si può risolvere, senza ricorrere alla geometria dell' infinito, di cui tutti gli uomini hanno almeno un'idea imperfetta, che noi tenterem qui di schiarire.

Osserviamo che, quando il punto E si avvicina a B passando successivamente in F, H, Q ecc., la retta EB continuamente si accorcia, e l'angolo EBA, che essa fa colla retta AB, sempre più si apre. Ma per quanto siasi accorciata la linea QB, l'angolo QBA sarà pur sempre un angolo, e per renderlo sensibile basterà prolungare quella linea accorciata QB, verso R. Avverrà egli lo stesso, allorchè la linea QB a forza di sempre diminuire sarà alla fine svanita? quale allora è diventata la sua posizione? quale è divenuto il suo prolungamento?

Egli è evidente, che questo prolungamento non è allora altro che la retta BS che tocca il circolo in un sol punto B, senza incontrarlo in nessun altro punto, e che per questa ragione si chiama *tangente*.

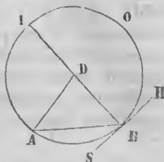
Di più è chiaro, che mentre la linea EB viene continuamente a scemare, fino ad annientarsi; la retta AE, che diventa successivamente AF, AH, AQ ecc., si avvicina sempre ad AB, e finalmente si confonde con essa. Dunque l' angolo alla circonferenza AEB, dopo esser diventato AFB, AHB, AQB, si confonde in ultimo luogo con l'angolo ABS, compreso tra la corda AB e la tangente BS, e questo angolo, che si chiama angolo al segmento, deve sempre conservare la proprietà di aver per misura la metà dell'arco AGB.

Tuttochè questa dimostrazione sia forse un po' troppo astratta pei principianti, pure ho creduto bene di recarla, perchè a coloro che

XIX.

La tangente al circolo in qualunque punto B (Fig. 88), è perpendicolare al diametro IDB, che passa per questo punto. Poichè essendo la curvatura del circolo sì uniforme, che un diametro qualunque IDB lo divide in due semicircoli IAB, IOB uguali, simmetricamente situati rispetto a questo diametro, ne segue, che le due parti BS, BH della tangente comune a questi due semicircoli, debbono pur essere egualmente poste rispetto a questo diametro, cioè far con esso angoli eguali: or ciò non potrebbe avvenire se IDB non fosse perpendicolare alla tangente HBS (1).

Fig. 88.



XX.

Quindi si vede che l'angolo ABS (stessa figura), compreso fra la corda AB e la tangente BS, ha per misura la metà dell'arco AB.

Infatti l'angolo ADB, insieme coi due angoli uguali DAB, DBA, fa due retti (Parte 1.ª, art. LXIV). Dunque la metà dell'angolo ADB, insieme coll'angolo DBA, fa un retto. Ma l'angolo DBA insieme coll'angolo ABS dà pure un retto. Dunque l'angolo ABS è uguale alla metà dell'angolo ADB. Dunque la misura di ABS sarà la metà dell'arco AB.

vogliono inoltrarsi co' loro studii fino alla Geometria dell' infinito, sarà utilissimo l'avvezzarsi di buon'ora a simili considerazioni. Un'altra dimostrazione della medesima proposizione, dedotta dalla proprietà più notabile delle tangenti al circolo, si troverà ne' due seguenti articoli XIX e XX (Nota tratta dal testo dell'autore).

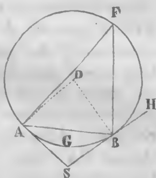
(1) Ciò si dimostra ancora osservando, che la tangente SBH toccando la circonferenza in un punto solo B, tutti gli altri punti di essa sono esterni al circolo: epperò le loro distanze dal centro D sono maggiori del raggio DB: è dunque DB la più breve distanza del centro D dalla retta SH, epperò la DB (Parte 1.ª, art III) è perpendicolare alla SH.

XXI.

Questa proprietà del circolo, che l'angolo ABS ha per misura la metà dell'arco AGB, ci somministra la soluzione del seguente problema.

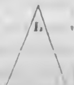
Descrivere sopra AB (Fig. 89) un segmento di circolo capace dell'angolo dato L (Fig. 90), cioè a dire, un segmento AFB, nel quale tutti gli angoli AFB alla circonferenza sieno eguali all'angolo L.

Fig. 89.



Per sciogliere questo problema, bisogna fare in A e in B gli angoli BAS ed ABS, ugnali tra loro ed all'angolo L, ed alzare sopra AS e sopra BS, le due perpendicolari AD e BD; il punto D, dove queste s' incontreranno, sarà il centro dell' arco cercato AFB.

Fig. 90.



Imperocchè per l' articolo XIX le rette BS ed AS, saranno tangenti al circolo, del quale il centro è D ed il raggio è AD ovvero BD, poichè BD ed AD sono perpendicolari a BS e ad AS. Di più per l'articolo precedente l'angolo ABS ha per misura la metà di AGB, e, per l' articolo XV, l' angolo AFB è pure misurato dalla metà di AGB. Dunque quest'angolo AFB sarà eguale ad ABS, cioè all' angolo L, come si domandava.

XXII.

La scoperta delle esposte proprietà de' segmenti di circolo, è verisimilmente dovuta alla semplice curiosità de' Geometri. Ma interviene tuttodì che molte scoperte giudicate da principio inutili, si mostrano coll'andar del tempo utilissime; e così si sono fatte nella pratica felici applicazioni di queste proprietà del

circolo. Io ne riferirò qui una sola, di uso assai frequente in Geografia.

Siano A, B, C (Fig. 91) tre luoghi de' quali si conoscono le scambievoli distanze AB, BC, AC; e per via di sole operazioni che possan farsi senza muoversi da un punto D, dal quale si possano vedere tutti e tre, vogliansi determinare le distanze DA, DB, DC di quei luoghi dal punto stesso D.

Fig. 91.

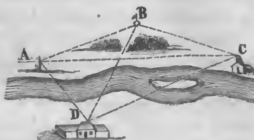
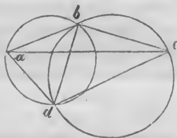


Fig. 92.



Si segnino sulla carta tre punti *a*, *b*, *c* (Fig. 92), i quali sieno tra loro situati nello stesso modo che i tre punti A, B, C, o per parlare geometricamente, si faccia il triangolo *abc* simile al triangolo ABC.

Misurati poi col grafometro i due angoli ADB, BDC, facciasi sopra *ab* il segmento di circolo *bda* capace dell' angolo BDA, e sulla retta *bc* il segmento di circolo *bdc* capace dell' angolo BDC: il punto *d*, dove si incontreranno questi circoli, segnerà sulla carta la posizione del luogo D; cioè le linee *da*, *db*, *dc* saranno nell' istessa proporzione rispetto ad *ab*, *bc*, *ac*, che le distanze cercate DA, DB, DC, rispetto alle distanze date AB, BC, AC; la qual conclusione non abbisogna di dimostrazione, dopo ciò che abbiamo veduto trattando delle figure simili.

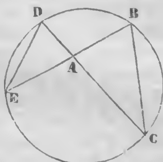
XXIII.

Si potrebbe far vedere facilmente che in molti altri casi ancora la pratica si giova delle proprietà del

circolo finquì dimostrate. Ma sarà miglior consiglio passare ad altre proprietà, le quali si deducono dalle precedenti, e che hanno esse pure la loro utilità.

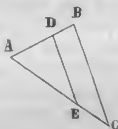
Per proceder con ordine, osserviamo in primo luogo, che due angoli qualunque EDC, EBC (Fig. 93), che si appoggiano sul medesimo arco EC, essendo eguali, ne segue che i triangoli DAE, BAC hanno gli angoli eguali, cioè (Parte 1.ª, art. XXXIX) che questi triangoli sono simili.

Fig. 93.



Infatti, per la ragion medesima che l'angolo EDC è uguale all'angolo EBC, l'angolo DEB sarà pure uguale all'angolo DCB, poichè entrambi questi angoli insistono sull'arco BD; e quanto agli angoli DAE, BAC, essi sono manifestamente eguali, sia perchè sono compresi tra le medesime linee, sia perchè due triangoli, che hanno due angoli rispettivamente eguali, hanno necessariamente il terzo angolo eguale (Parte 1.ª, art. XXXVIII).

Fig. 94.



Per applicare più facilmente ai triangoli ADE, ABC le proposizioni dimostrate relativamente ai triangoli simili, noi supporremo il triangolo DAE (Fig. 94) sovrapposto al triangolo BAC, in guisa che AD cada sopra AB, ed AE sopra AC, cosicchè DE sia parallela a BC. Ci ricorderemo allora

1.° Che se due triangoli ADE, ABC sono simili, i quattro lati AC, AE, AB, AD sono in proporzione (Parte 1.ª, art. XXXIX).

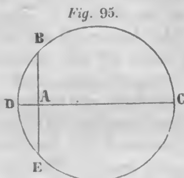
2.° Che in ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medii (Parte 2.ª, art. VIII),

onde conchiuderemo, che il rettangolo, ovvero il prodotto di AC per AD, è uguale al rettangolo di AE per AB; proprietà del circolo molto notabile, e che si può enunziare così: Se in un circolo si conducono ad arbitrio due rette, che si seghino, il prodotto delle due parti della prima è uguale al prodotto delle due parti dell'altra.

XXIV.

Se le due rette BE, DC (Fig. 95) si segano ad angoli retti, e l'una di queste due rette è un diametro DC, è chiaro che le due parti AB, AE dell'altra retta BE saranno eguali tra loro; di modo che la proprietà precedente, in questo caso particolare, si enunzierà così: se sul diametro DC di un circolo si alza una perpendicolare qualunque AB, il quadrato di questa perpendicolare sarà uguale al rettangolo di AD per AC.

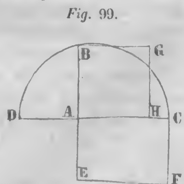
Fig. 95.



XXV.

Spesso avviene, che si ha bisogno di trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente. L'articolo precedente ci somministra a tal uopo un mezzo facile. Sia ACFE (Fig. 96) il rettangolo proposto, si prolunghi AC in D tanto che AD sia uguale ad AE, e si descriva il semicircolo DBC, che abbia DC per diametro; prolungando poscia il lato EA, finchè incontri il semicircolo in B, sarà AB il lato del quadrato cercato ABGH equivalente al rettangolo AFCE.

Fig. 99.



XXVI.

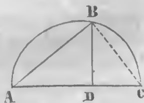
Questo stesso problema vien sovente proposto in altri termini, cioè si domanda di trovare una linea che sia *media proporzionale* tra due linee date. Per media proporzionale s' intende una linea, la quale contenga tante volte la più piccola delle due linee date, quante volte essa stessa è contenuta nella più grande: cioè a dire che se, per es., AB è media proporzionale tra AD ed AC, si potrà dire che AD sta ad AB, come AB ad AC. Ora è ben facile di vedere che questo problema è l'istesso che il precedente: poichè (Parte 2.ª, art. VIII) il prodotto degli estremi AD ed AC, o vogliam dire, il rettangolo di queste due linee sarà uguale al prodotto dei medii AB ed AB, cioè al quadrato di AB.

Dunque allorchè si vorrà trovare una media proporzionale tra due linee date, si trasformerà in un quadrato il rettangolo che ha queste due linee per lati, ed il lato del quadrato sarà la linea cercata.

XXVII.

Si può ancora trovare una media proporzionale tra due linee in un'altra maniera, la quale deriva dalla proprietà del circolo spiegata nell'articolo XIII. Supponghiamo che AC (Fig. 97) sia la più grande delle due linee date, e AD la più piccola, e si alzi DB perpendicolare sopra AC; dal punto B, ove essa incontrerà il semicircolo ABC descritto sulla AC come diametro, si tiri la corda AB; sarà questa media proporzionale tra AD ed AC. Infatti, condotta la BC, è chiaro, che il triangolo ABC sarà rettangolo in B. Dunque (Parte 1.ª, art. XXXVIII) questo triangolo sarà simile al triangolo ABD, poichè questi due triangoli hanno l' angolo A comune. Ma

Fig. 97.



se i triangoli ADB ed ABC sono simili, hanno i loro lati proporzionali. Dunque AD è ad AB, come AB ad AC. Dunque AB è media proporzionale tra AD ed AC.

XXVIII.

Se si vorrà trasformare una figura rettilinea qualunque in un quadrato equivalente, la soluzione di questo problema si farà dipendere dall'articolo XXV, riducendo prima la data figura in un rettangolo: ciò sarà facile, poichè ogni figura rettilinea può scomporsi in triangoli, e ciascun triangolo è equivalente ad un rettangolo di egual base e di metà altezza; tutti questi rettangoli poi si ridurranno in un rettangolo solo, trasformandoli in altri rettangoli che abbiano tutti l'altezza comune (Parte 2.ª, art. VI).

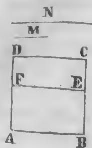
XXIX.

Le figure limitate da archi di circolo, potranno nello stesso modo trasformarsi in quadrati, quando si sarà misurata la lunghezza degli archi che ne formano il perimetro; poichè queste figure potranno allora trasformarsi in rettangoli, come le rettilinee. Per questo si ricorrerà agli articoli IX e X, ne' quali abbiamo insegnato a misurare le figure circolari.

XXX.

Dalla proprietà del circolo spiegata nell'art. XXIV si ricava ancora un metodo facilissimo per fare un quadrato, il quale stia ad un quadrato dato in ragion data: problema di cui nell' art. XXII della seconda Parte abbiam promessa la soluzione.

Fig. 98.



Supponghiam, per esempio, che vogliasi fare un quadrato che stia al quadrato ABCD (Fig. 98), come la linea M alla linea N. Si dividerà (Parte 1.ª, art. XLI) il lato CB nel punto E in modo che CB stia a BE, come la linea N alla linea M. Tirando EF parallela ad AB, il rettan-

golo ABEF avrà la medesima superficie che il quadrato domandato: ed il problema si risolverà trasformando questo rettangolo in un quadrato.

XXXI.

Se poi si volesse fare un poligono HIKLM (Fig. 100), che stesse al poligono simile ABCDE (Fig. 99), in ragione della linea X alla linea Y, si fa-

Fig. 99.

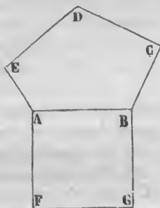


Fig. 100.

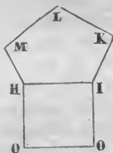


Fig. 100 bis.

X

Y

rebbe prima sul lato AB del poligono dato il quadrato ABGF. Si cercherebbe col metodo ora insegnato un altro quadrato HIOQ, che stesse al quadrato ABGF, come la linea X alla linea Y. Ed allora descrivendo sul lato HI di questo quadrato un poligono KILMH, simile al primo ABCDE, questo nuovo poligono sarebbe quello che si domanda. La ragione è facile a vedere, se si ricorda (Parte 1.ª, art. XLVIII), che le figure simili stanno tra loro come i quadrati de' loro lati omologhi.

XXXII.

Per fare un circolo, la cui area stia a quella di un circolo dato, come X all'Y, si costruisca un quadrato che stia al quadrato fatto sul raggio del primo circolo, come X all'Y; ed il lato del nuovo quadrato sarà il raggio del circolo domandato.

XXXIII.

Ecco un' altra proprietà del circolo dedotta da quella che ha dato il mezzo di risolvere il problema antecedente.

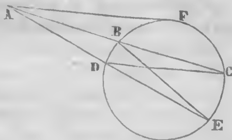


Fig. 101.

Se da un punto A (Fig. 101) preso fuori d' un circolo si conducano ad arbitrio due seganti, cioè due rette ABC, ADE, che seghino la circonferenza, ciascuna in due punti, e poscia si tirino le rette CD, BE, i triangoli ACD, AEB saranno simili. Infatti l'angolo A è comune ai due triangoli, i quali hanno inoltre gli angoli alla circonferenza C ed E uguali. Ora dall'esser simili i triangoli CAD, EAB, ne segue che le quattro linee AB, AD, AE, AC sono in proporzione, e conseguentemente che il rettangolo costrutto sulle due rette AB, AC, è equivalente al rettangolo costrutto sulle due rette AD, AE. Riesce così dimostrato che: Se da un punto qualunque A, preso fuori di un circolo, si tirano ad arbitrio due rette AC, AE, che attraversino questo circolo; il prodotto della segante AC per la sua parte esteriore AB, sarà uguale al prodotto della segante AE, per la sua parte esteriore AD.

XXXIV.

Quando una delle rette in luogo di segare il circolo lo tocca soltanto, come AF (stessa figura), la proprietà precedente si cangia in quest'altra: il quadrato della tangente AF, è uguale al prodotto della segante qualunque AE, e della sua parte esterna AD. Ciò è facile a dimostrare; poichè riguardando la retta AF, che tocca il circolo, come una linea che lo taglia

in due punti infinitamente vicini, le linee AB, AC si mutano entrambe nella AF, ed in vece del prodotto di AB per AC, si ha il quadrato di AF.

XXXV.

La proposizione dimostrata nell'articolo precedente ci dà bensì il valore del quadrato della tangente AF, ma non ci insegna a tirare questa tangente dal punto dato A. Ciò tuttavia si farà facilmente ricordandosi (art. XIX) che il raggio FG (Fig. 102) è perpendicolare alla tangente FA. E così non occorre altro che trovare sul circolo dato il punto F, tale che l'angolo AFG sia retto; epperò descrivendo sopra AG come diametro un semicircolo, il punto ov'esso incontrerà il circolo FKO, sarà (art. XIII) il punto cercato F.

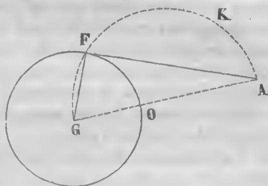


Fig. 102.

FINE DELLA PARTE TERZA.

PARTE QUARTA.

DELLA MANIERA DI MISURARE I SOLIDI, E LE LORO SUPERFICIE.

I principii, che abbiamo stabiliti nelle tre prime parti di quest' opera, sarebbero sufficienti a sciogliere problemi assai più difficili di quelli che siam per proporci: ma attenendoci al metodo che abbiam finora seguito passeremo alla misura dei solidi, cioè, delle estensioni finite che hanno tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità od altezza.

Questa ricerca è stata senza dubbio uno de' primi oggetti che hanno tratto a sè l' attenzione de' Geometri. Per esempio, si sarà voluto sapere quante pietre riquadrate vi fossero in un muro (Fig. 103), di cui si conoscevano l'altezza AD, la larghezza AB, e la profondità ovvero grossezza BG. Si sarà voluto determinare la quantità d'acqua contenuta in una fossa o conserva ABCD (Fig. 104); si sarà voluto trovare la solidità di una torre, di un obelisco, di una casa, d'un campanile ecc.

Fig. 103.

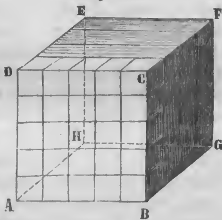


Fig. 104.



Per procedere rispetto alle figure che hanno tre dimensioni con lo stesso ordine che abbiam tenuto per quelle che ne hanno due sole, esamineremo prima i solidi terminati da' piani.

Nè occorre fermarci sulla misura della superficie di questi corpi, la quale componendosi di figure rettilinee variamente unite, si misura come è stato detto nella Parte Prima.

I.

Per misurare la solidità de' corpi è naturale di riferirli tutti al solido più semplice, come per misurare le superficie, si sono tutte riferite al quadrato. Ora il cubo è il solido più semplice, e tiene tra i solidi lo stesso luogo che il quadrato tra le superficie, essendo esso uno spazio come *abcdefgh* (Fig. 105), di cui la lunghezza, la larghezza e la profondità sono uguali, ossia una figura terminata da sei faccie uguali e quadrate.

Fig. 105.



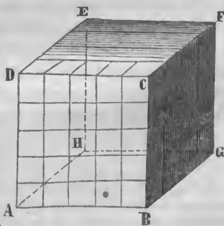
Si chiama lato del cubo il lato de' quadrati che lo terminano.

Per metro cubo s' intende un cubo che ha per lato un metro; così ancora un centimetro cubo è un cubo che ha per lato un centimetro.

II.

I solidi, che più frequentemente si hanno da misurare, sono figure come ABCDEGFH (Fig. 103), terminate da sei faccie rettangole ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH, ABGH. Si chiamano questi solidi parallelepipedi, perchè le loro faccie opposte conservando in tutti i loro punti la distanza medesima l' una dall' altra, sono dette parallele, come parallele sono dette le linee, che serbano da per tutto la stessa distanza.

Fig. 103.



III.

Ora l' analogia che passa tra i solidi di questa specie, e le superficie rettangole, somministrerà un mezzo facile di trovarne la misura.

Si misurino separatamente la lunghezza AD (Fig. 103), la larghezza AB, e la profondità BG della figura proposta, prendendo per unità il metro, oppure il decimetro o il centimetro, ecc. Si moltiplichino tra di loro i tre numeri così trovati, ed il prodotto esprimerà quanti metri cubi o decimetri o centimetri cubi conterrà il parallelepipedo proposto. L'esempio seguente mostrerà come si faccia questa operazione.

Supponghiamo che la lunghezza AD sia di 6 metri, la larghezza AB di 5, e la profondità BG di 4; il rettangolo ABCD (Parte 1.ª, art. XI) avrà sei volte cinque, ovvero 30 metri quadrati. Se dipoi s' immagina che le linee BG, CF, DE, AH, che misurano tutte ugualmente la profondità del solido, siano ciascuna divise in quattro parti uguali, e che pei punti di divisione corrispondenti si facciano passare altrettanti piani paralleli, questi piani divideranno il parallelepipedo proposto in quattro altri parallelepipedi, che avranno ciascuno un metro di profondità, e che saranno tutti uguali. Ora la sola vista della figura dimostra che il primo di questi parallelepipedi contiene 30 metri cubi. Dunque il solido totale ABCDEFGH conterrà quattro volte 30 ovvero 120 metri cubi (1).

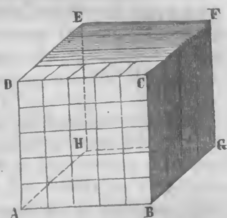
(1) Con questa regola è facile di vedere che un metro cubo contiene mila decimetri cubi; che un decimetro cubo contiene mila centimetri cubi, e questo mila millimetri cubi. Un vaso la cui capacità interna equivale ad un decimetro cubo si chiama *litro*, e si prende per unità delle misure di capacità. Per analogia con ciò che si pratica rispetto ai multipli, ed alle parti aliquote del metro, una misura di dieci litri si chiama *decalitro*: una misura di cento litri, *ettolitro*: ancora la decima, la centesima, la millesima parte del litro si chiamano *decilitro*, *centilitro*, *millilitro*.

IV.

Non ci tratterremo a spiegare i varii mezzi che si possono praticamente usare per costruire parallelepipedi, perchè questi mezzi sono per lo più sì facili a trovare, che non vi ha chi non possa immaginarli da sè. Daremo bensì la formazione seguente del parallelepipedo, la quale è più utile a considerare delle altre.

Si concepisca un quadrato, ovvero un rettangolo ABGH (Fig. 103), il quale si muova parallelamente a sè medesimo in modo che i suoi quattro angoli A, B, G, H, percorrano le quattro rette eguali AD, BC, GF, HE, perpendicolari al piano del rettangolo ABGH. Se nel muoversi così questo rettangolo lasciasse dietro di se la traccia di tutte le posizioni per cui è venuto successivamente a passare, il complesso di tutte queste posizioni formerebbe il parallelepipedo ABCDEFGH.

Fig. 103.



V.

È presso che inutile l'avvertire che sotto nome di linea perpendicolare ad un piano noi intendiamo una retta, che non pende da nissuna parte sopra questo piano; e similmente che un piano, il quale non pende più da un lato che da un altro sopra un secondo piano, è detto perpendicolare a questo secondo piano:

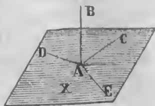
Il peso di un *millilitro*, o *centimetro cubo* d' acqua, si chiama *gramma*, e seguendo sempre la medesima regola come pei multipli del metro, il *decagramma*, l' *ettogramma*, il *chilogramma* e il *miriagramma* sono pesi di dieci, di cento, di mila e di diecimila grammi; il *decigramma*, il *centigramma*, il *milligramma* sono rispettivamente eguali alla decima, alla centesima, ed alla millesima parte del gramma

le quali due definizioni sono analoghe a quelle che abbiamo date di una retta perpendicolare ad un'altra retta.

VI.

Ne segue che la retta AB (Fig. 106), perpendicolare al piano X, dee essere perpendicolare a tutte le rette AC, AD, AE, ecc. che passano pel piede A di questa retta, e sono contenute in questo piano. Poichè egli è evidente, che se pendesse verso una di queste linee, essa sarebbe pure inclinata verso qualche parte del piano, epperò non sarebbe più ad esso perpendicolare.

Fig. 106.



VII.

Per rappresentarsi in modo ben sensibile, come la retta AB possa essere perpendicolare a tutte le linee che passano per la sua estremità, si potrà fare una figura in rilievo nel modo seguente:

Si costruirà di cartone un rettangolo FGDE (Fig. 107), diviso in due parti uguali dalla retta AB, perpendicolare a' lati ED, FG; si piegherà poi questo rettangolo secondo la linea AB, e così piegato si porrà sul piano X (Fig. 108). Egli è evidente, che qualunque apertura si dia alle due parti FBAE, GBAD, del rettangolo piegato EADGBF, le rette AD, AE resteranno sempre applicate sul piano X, senza che la linea AB cangi di posizione riguardo a questo piano: dunque questa retta AB sarà perpendicolare a tutte le linee, le quali partono dal suo piede, e che saranno nel piano X, poichè i lati AE, AD del ret-

Fig. 107.

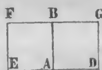
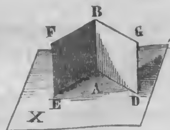


Fig. 108.

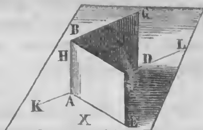


tangolo piegato, si applicheranno successivamente nel loro moto su ciascuna di queste linee.

VIII.

Da questa costruzione si deduce una pratica molto comoda per alzare da un punto dato di un piano una linea perpendicolare a questo piano, o per calare sul piano stesso una perpendicolare da un punto preso fuori di esso. Infatti, sia che il punto dato cada in quel piano come in A (Fig. 109), o fuori di esso come in H, si potrà sempre fare avanzare il rettangolo EFBGDA sul piano X, sinchè la piegatura AB tocchi il punto dato, e in tutti e due i casi sarà AB la perpendicolare domandata.

Fig. 109.



IX.

Ne segue ancora, che una retta AB (Fig. 109) sarà perpendicolare a un piano X, tutte le volte che essa sarà perpendicolare a due rette AE, AD segnate in questo piano. Perchè allora AB potrà riguardarsi come la piegatura di un rettangolo, del quale uno de' lati piegati si applichi sopra AE, e l'altro sopra AD. Or questa piegatura non potrà non esser perpendicolare al piano X.

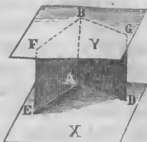
X.

Se sulla retta KL (Fig. 109) contenuta nel piano X si volesse innalzare un piano a questo perpendicolare, si potrebbe far uso ancora del rettangolo piegato GBFEAD; poichè posando sulla linea KL il lato AD di una delle parti ADGB di questo rettangolo piegato, il piano ADGB sarebbe il piano domandato.

XI.

Si vedrà ancora facilmente, che posando un terzo piano Y (Fig. 110) su i due lati FB, BG del medesimo rettangolo piegato, questo piano Y sarà esso pure perpendicolare alla linea AB, e per conseguenza parallelo al piano X.

Fig. 110.

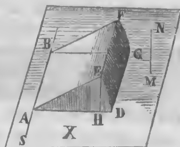


Dunque se sopra un piano X si alzino tre perpendicolari EF, AB, DG di eguale lunghezza, il piano Y, che passerà pei tre punti F, B, G, sarà parallelo al piano X.

XII.

Quando due piani non sono paralleli, è pur facile determinar l'angolo ch'essi fanno tra loro, per mezzo dello stesso rettangolo piegato. Si applichi una delle due parti ABGD (Fig. 111) di questo rettangolo sul piano X; egli è evidente che l' angolo EAD ovvero il suo eguale FBG, misurerà l' inclinazione del piano EABF sul piano DABG. Or se si avverte, che AB è la comune sezione di questi piani, cioè la retta secondo la quale essi s' incontrano, e che EA e AD sono perpendicolari ad AB, se ne ricaverà la seguente regola :

Fig. 111.



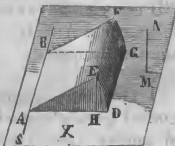
Dati due piani non paralleli, si cerchi la linea retta che è loro comune sezione; poi da un punto qualunque di questa retta, si tirino due rette ad essa perpendicolari, e contenute ciascuna in uno di questi piani; l'angolo, che faranno tra loro queste due perpendicolari, misurerà l'angolo che i due piani dati fanno tra loro.

XIII.

Se si suppone ora che il piano ABFE (Fig. 111) giri attorno alla piegatura AB, la retta AE, che col suo punto estremo E descrive un arco di circolo ED, non uscirà mai da un piano EAHD, perpendicolare al piano X, e l'inclinazione della retta EA sul piano X sarà misurata dall'angolo EAD. Da ciò si conclude, che l'inclinazione di una retta qualunque EA sul piano X, ha per misura l'angolo EAH compreso tra questa linea EA e la linea AD, che passa per A e per H, cioè per quel punto del piano X, ove cade la perpendicolare EH, abbassata su questo piano da un punto qualunque E della data retta AE.

XIV.

Fig. 111.



La figura stessa, di cui ci siamo serviti nell' articolo precedente, ci suggerisce un nuovo mezzo di abbassare da un punto E, dato fuori del piano X, una perpendicolare EH a questo piano.

Nel dato piano X si conduca una retta qualunque BAS, e dal punto dato E si abbassi sovra di essa la perpendicolare EA. Ciò fatto, dal punto A ove cade questa perpendicolare, si tiri nel piano X la AD perpendicolare ad AB, e finalmente dal punto dato E abbassando sulla retta AD la perpendicolare EH, sarà questa la perpendicolare al piano X.

XV.

Quindi si trae un'altra maniera di alzare in un punto M (stessa figura) dato nel piano X, una perpendicolare MN a questo piano.

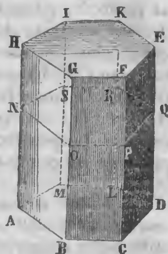
Avendo abbassato da un punto qualunque E preso fuori del piano X la perpendicolare EH a questo

piano, si tirerà pel punto dato M la retta MN parallela ad HE, e sarà questa la perpendicolare domandata.

XVI.

Dopo il parallelepipedo, il solido più semplice è il prisma retto. Questo è una figura come ABCDLMHGFEKI (Fig. 112), di cui due facce opposte e parallele ABCDLM, HGFEKI, che chiamansi basi del prisma, sono due poligoni eguali, e collocati in guisa che i lati GF, FE ecc. dell'uno sieno paralleli a' lati rispettivamente eguali BC, CD ecc. dell'altro; tutte le altre facce come ABGH, BCFG, ecc. sono rettangoli.

Fig. 112.



XVII.

I Geometri suppongono queste figure generate come i parallelepipedi da una base ABCDLM la quale si muova parallelamente a se medesima, in guisa che i suoi angoli A, B, ecc. scorrano lungo tante rette perpendicolari al piano della base.

XVIII.

Per distinguere le differenti specie di prismi retti, alla parola Prisma si aggiunge il nome del poligono che gli serve di base. Il prisma esagono, per es., è quello di cui la base è un esagono.

XIX.

Per trovare la misura di qualsivoglia prisma retto, gioverà l'osservare, che di due prismi retti di egual base, quello che avrà maggiore altezza avrà pure maggior solidità; e le solidità dei due prismi staranno nella medesima ragione che le loro altezze.

XX.

Si osserverà ancora che due prismi retti che abbiano la medesima altezza, ma basi differenti, cosicchè la base dell' uno contenga un certo numero di volte la base dell' altro, saranno tra loro nella medesima ragione che le loro basi. La verità di questa proposizione risulta dalla generazione de' prismi spiegata nell'articolo XVII.

Sieno *abcdefghiklm* (Fig. 113) ed ABCD EFGHIKLM (Fig. 112) due prismi di eguale altezza, e sia la base *abcdlm* del più piccolo contenuta quattro volte, per es., nella base ABCDLM. Poichè i due prismi sono prodotti da' movimenti di queste due basi, ne segue, che un piano qualunque parallelo a quello su cui posano i due prismi li taglierà secondo due poligoni rispettivamente uguali alle loro basi: cioè a dire, che la sezione del gran prisma sarà sempre quadrupla di quella del piccolo. Dunque il prisma ABCDEFGHIKLM potrà essere riguardato come composto di falde o fette tutte quadruple di quelle del prisma *abcdefghiklm*, e per conseguenza la solidità del primo prisma sarà quadrupla di quella del secondo.

Fig. 112.

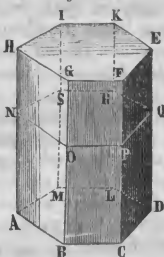
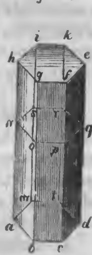


Fig. 113.



XXI.

Da queste due osservazioni si trae tosto la regola seguente per la misura dei prismi retti.

Si misurerà in metri, o decimetri ecc. quadrati,

l'area della base del prisma proposto, poi si moltiplicherà il numero che si sarà trovato pel numero de' metri, o decimetri ecc. contenuti nell'altezza del prisma, ed il prodotto darà il numero de' metri, o decimetri ecc. cubi, contenuti nel prisma proposto, e ne esprimerà la misura.

XXII.

Il nome di prisma si dà ancora ai solidi, che hanno due basi poligone eguali e parallele, come i precedenti, ma ne' quali le altre facce non sono rettangoli, ma bensì parallelogrammi. Questi nuovi prismi, si chiamano *prismi obliqui*, per distinguerli dagli altri che abbiamo chiamati *prismi retti*.

XXIII.

I prismi obliqui si concepiscono generati da una base *abcki* (Fig. 115), la quale si muova parallelamente a se medesima, ed in guisa che i suoi angoli seguano le linee parallele *ag*, *bh*, *cd* ecc., elevate fuori del piano della base, e ad essa non perpendicolari.

XXIV.

Fig. 114.

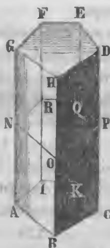
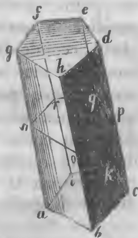


Fig. 115.



L'analogia di questa generazione con quella de' prismi retti (art. XVII), dà facilmente la misura della solidità de' prismi obliqui. Infatti, se accanto ad un prisma obliquo *abcdefghik* (Fig. 115) s'immagina collocato un prisma retto ABCDEFGHIK (Fig. 114) che abbia la medesima base, ed i due prismi sieno compresi tra due piani paralleli, la solidità di questi due corpi sarà assolutamente la medesima.

Infatti se per un punto qualunque P dell'altezza si fa passare un piano parallelo alla base, le sezioni NOPQR, *nopqr*, fatte da questo piano ne' due prismi, potranno riguardarsi come le basi stesse ABCKI, *abcki* passate in una delle infinite posizioni ch'esse occuperanno successivamente nel generare i due prismi, e così queste due sezioni saranno poligoni uguali.

Or se tutte le falde, in cui questi due prismi possono essere tagliati per mezzo de' medesimi piani, sono eguali, eguali pur saranno le somme di queste falde, cioè le solidità de' prismi.

Questa proposizione si suole ordinariamente esprimere così: I prismi obliqui sono eguali a' prismi retti, allorchè hanno la medesima base e la medesima altezza. Si chiama altezza del prisma la perpendicolare calata dal piano superiore sull'inferiore, o sopra il prolungamento di esso.

XXV.

Fig. 116.

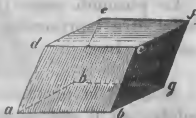


Fig. 117.



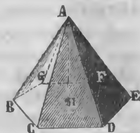
E siccome i parallelepipedi debbono annoverarsi tra i prismi, le cose or dimostrate si applicheranno pure ai parallelepipedi obliqui, cioè a dire alle figure come *abcdefgh* (Fig. 116), generate dal movimento di un quadrato, di un rettangolo ovvero di un parallelogrammo, i cui angoli seguano quattro rette parallele alzate obliquamente sulla base. Così il parallelepipedo obliquo *abcdefgh* sarà uguale al parallelepipedo retto ABCDEFGH (Fig. 117), se la base *abgh* è eguale od equivalente alla base ABGH, e se la perpendicolare calata dal piano

dcfe sul piano *abgh* è uguale alla perpendicolare calata dal piano DCFE sul piano ABGH.

XXVI.

Dai parallelepipedi e dai prismi passiamo ora alle piramidi, cioè ai corpi che, come ABCDEFG (Fig. 118), sono limitati da un certo numero di facce triangolari che partono tutte da uno stesso vertice A, e che terminano ne' lati di una base poligona qualunque BCDEFG. Egli è necessario di considerare questa specie di solidi non solamente perchè si incontrano negli edifizi e in altri simili lavori; ma ancora perchè tutti i solidi terminati da' piani ponno scomporsi in piramidi, come le figure rettilinee si scompongono in triangoli. Per accertarsene basta tirare da un punto preso ad arbitrio, nell' interno del corpo proposto, tante rette ai vertici di tutti gli angoli del corpo.

Fig. 118.



XXVII.

Le piramidi come i prismi si distinguono le une dalle altre esprimendo il nome della figura che loro serve di base.

XXVIII.

Allorchè la piramide ha per base una figura regolare, ed il suo vertice si trova sulla perpendicolare eretta nel centro H della sua base come nella figura 118ª, la piramide dicesi *retta*; al contrario è detta *obliqua* allorchè il vertice non è sulla perpendicolare innalzata nel centro della base, come nella fig. 120ª.

Fig. 118.

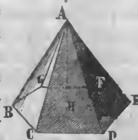
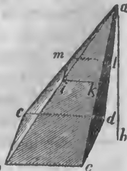


Fig. 120.



XXIX.

Prima di esporre la maniera di misurare le piramidi tanto rette quanto oblique, faremo su queste figure alcune riflessioni generali, alle quali conduce la conoscenza delle proprietà de' prismi.

L'eguaglianza de' prismi che hanno egual base ed eguale altezza, ricorderà al lettore che una proposizione analoga è stata dimostrata pei parallelogrammi, e quindi pei triangoli.

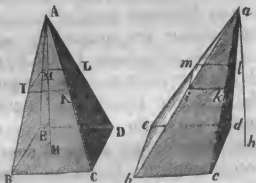
Queste tre proposizioni rappresentandosi alla mente, l'analogia dee portarci a credere che quella proprietà che è comune a' parallelogrammi ed ai triangoli, può essere comune ancora a' prismi ed alle piramidi; epperò è lecito congetturare che le piramidi che hanno egual base ed eguale altezza, hanno pure solidità eguale.

XXX.

Le seguenti riflessioni confermeranno questa congettura.

Sieno ABCDE, *abcde* (Fig.e 119 e 120), due piramidi, le quali abbiano eguali altezze AH, *ah*, e le cui basi siano due figure uguali, per es. due quadrati uguali BCDE, *bcde*: se si immaginano queste

Fig.e 119 *e* 120.



due piramidi tagliate da un' infinità di piani paralleli alle loro basi, si scorgerà facilmente che le sezioni fatte nelle due piramidi da ciaschedun piano saranno due quadrati eguali IKLM, *iklm*, e conseguentemente che le due piramidi potranno riguardarsi come somme di un medesimo numero di falde, uguali cia-

scuna a ciascuna; se ne concluderà che la somma delle falde è la medesima da una parte e dall'altra, cioè che le due piramidi hanno la medesima solidità.

Se le basi delle due piramidi fossero altri poligoni regolari o irregolari BCDEF, *bcdef* (Fig. 121 e 122) eguali tra loro, non si può dubitare che tutte le sezioni corrispondenti IKLMN, *iklmn* delle due piramidi non dovessero essere eguali tra loro, e per conseguenza anche in questo caso si conchiuderebbe che i volumi delle due piramidi sarebbero eguali.

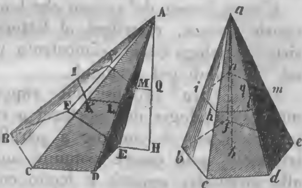


Fig. 121 e 122.

XXXI.

Tutto ciò è facile a concepirsi dopo la dimostrazione che abbiam data dell' ugualità de' prismi che hanno la stessa base e la stessa altezza: tuttavia la similitudine tra qualunque sezione IKLMN d' una piramide e la base BCDEF, e l'ugualità delle falde IKLMN e *iklmn*, sono proposizioni, le quali ancorchè riescano sensibili ad ognuno, hanno, rigorosamente parlando, bisogno di dimostrazione; per la qual cosa ci occorre entrare in alcune considerazioni sulla similitudine delle figure solide.

XXXII.

Riprendiamo la piramide ABCDEF (Fig. 121), e supponendola tagliata da un piano IKLMN parallelo alla base, pro-

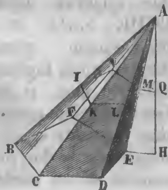


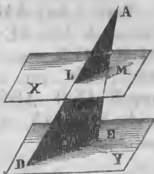
Fig. 121.

poniamci di dimostrare che la sezione fatta da questo piano nella piramide è un poligono simile al poligono BCDEF, e che la piramide AIKLMN è essa pure simile alla piramide ABCDEF, cioè che gli angoli tutti compresi fra le linee di queste due figure sono rispettivamente eguali, e che tutti i lati della piccola piramide sono proporzionali ai lati corrispondenti della piramide maggiore.

XXXIII.

Osserviamo in primo luogo che se due piani X ed Y (Fig. 123) sono paralleli, e tagliano ne' punti D, E, L, M le due rette qualunque ALD, AME che s'incontrano nel punto A, le rette LM, DE, che congiungono i punti L, M, D, E, saranno parallele tra loro; infatti se queste due linee non fossero parallele, i loro prolungamenti s' incontrerebbero in qualche luogo; ma se s'incontrassero, i piani, ne' quali le due rette sono contenute e dai quali non possono uscire, s' incontrerebbero anch'essi, purchè venissero sufficientemente prolungati. Dunque non sarebbero più paralleli come si sono supposti.

Fig. 123.



XXXIV.

Dato dunque che il piano IKLMN (Fig. 121) sia parallelo al piano BCDEF, ne seguirà che tutte le linee ML, LK, KI, IN, MM saranno parallele alle linee ED, DC, CB, BF, FE, e conseguentemente, che i triangoli ALM, AKL, AIK ecc. saranno simili ai triangoli ADE, ACD, ABC ecc. Prendendo adunque uno de' lati di questi triangoli, per esempio AM, per comune misura, o per iscala di tutti i lati della piccola piramide, ed il lato corrispondente AE per iscala

de' lati della grande, si vedrà facilmente che i lati ML, LK, KI ecc. del poligono IKLMN saranno proporzionali a' lati ED, DC, CB ecc. del poligono BCDEFG.

Si vedrà ancor facilmente, che tutti gli angoli IKL, KLM ecc. saranno rispettivamente eguali agli angoli BCD, CDE, poichè i primi saranno formati da linee parallele a' lati de' secondi. Dunque i due poligoni IKLMN, BCDEF saranno simili.

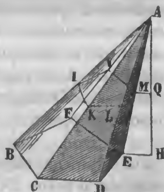
XXXV.

Tutti i lati AM, AL, AK ecc. essendo proporzionali a' lati AE, AD, AC ecc., e tutti gli angoli ALM, ALK ecc. rispettivamente eguali agli angoli ADE, ADC ecc. a cagione della similitudine de' triangoli ALM, ADE, ALK, ADC ecc., le due piramidi AIKLMN, ABCDEF saranno intieramente simili.

XXXVI.

Conducasi dal punto A (Fig. 121) la perpendicolare AH al piano della base BCDEF, e sia Q il punto ove questa perpendicolare incontra il piano del poligono IKLMN sufficientemente prolungato; egli è chiaro, che le rette AQ, AH, altezze delle due piramidi AIKLMN, ABCDEF, saranno tra loro nella medesima ragione che i lati omologhi AM, AE, AL, AD ecc.; cioè, che prendendo le altezze AQ, AH, per iscale delle due piramidi, i lati AM, AL ecc. conterranno tante parti di AQ, quante i lati AE, AD ecc. contengono parti di AH.

Fig. 121.



XXXVII.

Tornando ora a considerare le due piramidi

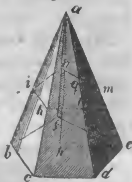


Fig. 122.

ABCDEF, *abcdef* (Fig. 121 e 122), si vedrà che le due sezioni IKLMN, *iklmn* essendo simili alle basi eguali BCDEF, *bcdef*, saranno simili tra loro. Si vedrà di più che queste due sezioni saranno uguali fra loro, poichè le scale di queste due figure sono le rette uguali AQ, *aq*, altezze delle piramidi AIKLMN, *aiklmn*.

Dunque, senza conoscere la solidità delle piramidi, si può già affermare con certezza che se queste hanno la medesima altezza e la medesima base, esse sono uguali, come avevamo congetturato (art. XXIX).

XXXVIII.

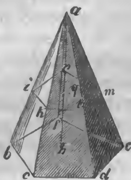


Fig. 122.

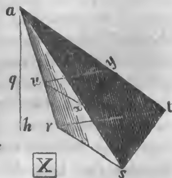


Fig. 124.

Se le basi di due piramidi in luogo di essere eguali, saranno solamente equivalenti, le piramidi saranno ancora equivalenti in solidità. Infatti, sieno *abcdef* (Fig. 122) e *arst* (Fig. 124) due piramidi di eguale altezza *ah*; tagliando queste due piramidi con un piano qualunque parallelo alla base, egli è evidente che l'istessa proporzione avrà l'area *iklmn* all'area *bcdef*, che l'area *uxy* all'area *rst*; poichè *iklmn*, *bcdef* essendo (Parte 1.ª, art. XXXIV) figure simili, non differiscono (Parte 1.ª, art. XLVIII) che per le loro scale *aq*, *ah* ecc.; e così le figure *uxy*, *rst*, essendo parimente simili, non differiscono esse

pure che per le loro scale, che sono ancora le linee *aq, ah.*

Ma se le basi *rst, bcdef* sono eguali in superficie, le loro parti proporzionali *uxy, iklmn,* sono uguali: dunque tutte le falde delle due piramidi *arst, abcdef* avranno la medesima estensione: dunque tutte esse insieme, cioè a dire le piramidi medesime saranno eguali in solidità.

XXXIX.

Se la base *bcdef* della prima piramide contiene un numero determinato di volte la base *rst* della seconda, la solidità della prima piramide *abcdef* conterrà il medesimo numero di volte la solidità della seconda *arst.*

Perchè in questo caso la base *bcdef* essendo divisa in più parti equivalenti alla base *rst,* si potrà concepire la piramide *abcdef* come composta di più altre piramidi, che abbiano per basi le parti di *bcdef.* Or ciascuna di queste nuove piramidi sarà equivalente alla seconda piramide *arst* per l'articolo precedente: dunque ecc.

Che se la base *rst* non venisse esattamente contenuta nella base *bcdef,* ma esistesse tra queste basi una misura comune X, si potrebbe ciascuna di queste due basi *bcdef, rst* dividere in parti uguali ad X, ed apparirebbe manifestamente che le due piramidi *abcdef, arst* possono riguardarsi come composte di tante piramidi tutte tra loro eguali, quante sono le parti eguali ad X contenute nelle loro basi, e che per conseguenza le piramidi *abcdef, arst* stanno tra loro come le loro basi.

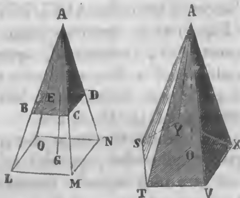
Finalmente se queste basi fossero incommensurabili, si dimostrerebbe ancora che le piramidi sarebbero tra loro nella ragion delle basi, per via di

una induzione simile a quella che abbiamo usata (Parte 2.ª, art. XXVIII) per confrontare le figure piane di lati incommensurabili; cioè a dire che si diminuirebbe all'infinito la misura X, in modo che potesse assumersi per misura comune delle basi *rst*, *bcdef*.

XL.

Or che sappiamo che le piramidi d'eguale altezza sono proporzionali alle lor basi, la misura della loro solidità non ci riuscirà gran fatto difficile, poichè basterà saper misurare una sola piramide per misurare tutte le altre.

Fig. 125 e 126.



Supponghiamo, per esempio, che sappiasi misurare la piramide ABCDE (Fig. 125), e si domandi la misura della piramide ASTVXY (Fig. 126), che non ha nè la medesima base, nè la medesima altezza della prima. Facciasi una piramide simile alla piramide ABCDE, e d'altezza eguale a quella della piramide ASTVXY; ciò sarà facile, poichè basterà (art. XXXV) prolungare i lati AB, AC, AD, AE, e tagliarli col piano LMNO, la cui la distanza AG dal vertice A, sia eguale all'altezza AO.

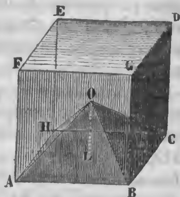
Ciò fatto, poichè per ipotesi sappiamo misurare la piramide ABCDE, saprem pure misurare la piramide simile ALMNO. Perchè quali che sieno le operazioni per le quali si misura la piramide ABCDE, si potranno sempre fare le medesime operazioni per misurare la piramide simile ALMNO, mutando solo la scala.

Ottenuta così la misura della piramide ALMNO, essa determinerà quella della piramide proposta ASTVXY: perchè per l' articolo precedente queste due piràmidi stanno tra loro, come le loro basi LMNO, STVXY, e già abbiamo insegnato nella Seconda Parte a trovare il rapporto di queste due basi.

XLI.

Poichè dalla misura di una sola piramide si deduce quella di tutte le altre, proponghiamoci la piramide semplicissima che si forma tirando da' quattro angoli A, B, C, H, d'una faccia di un cubo ABCDEFGH (Fig. 127), quattro linee al punto O, centro di questo cubo, cioè a dire al punto che è ad egual distanza da tutti i vertici A, D, B, E ecc.

Fig. 127.

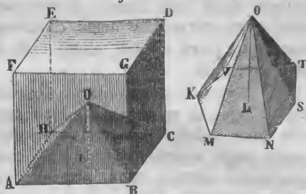


Or subito si scorge che questa piramide è la sesta parte del cubo, poichè si può il cubo risolvere in sei piramidi uguali, prendendo successivamente per base ciascheduna delle sue facce. Ma il volume del cubo ha per valore il prodotto dell'altezza AF per la base ABCH. Dunque per avere il volume della piramide bisognerà prendere la sesta parte del prodotto di AF per ABCH; ovvero, quel che torna allo stesso, moltiplicare la sesta parte dell'altezza AF per la base ABCH; e siccome la sesta parte dell'altezza AF del cubo è il terzo dell' altezza OL della piramide OABCH (poichè la sua altezza OL è la metà del lato del cubo), la misura della piramide OABCH sarà il prodotto del terzo della sua altezza per la base.

XLII.

Supponendo ora, che s'abbia da misurare una piramide qualunque OKMN STV (Fig. 128), si immagini un cubo di lato AB, o AF (Fig. 127) doppio dell' altezza OL della

Fig. 127 e 128.



piramide proposta, e si concepisca dentro questo cubo una piramide OABCH, col vertice nel centro del cubo, e che abbia per base una delle faccie ABCH di esso. Questa nuova piramide avrà la medesima altezza della prima, e per conseguenza (art. XXXIX) la solidità di OABCH sarà a quella di OKMNSTV, come la base ABCH alla base KMNSTV: or per l'articolo precedente il prodotto del terzo dell'altezza comune OL per la base ABCH è il valore della piramide OABCH: dunque il prodotto del terzo della medesima altezza comune OL per la base KMNSTV sarà il valore della piramide proposta OKMNSTV.

Così si scopre questo generale teorema, che ogni piramide ha per misura il prodotto della sua base nel terzo della sua altezza.

XLIII.

Poichè (art. XXI) la solidità di un prisma ha per misura il prodotto della base per l'altezza, egli è chiaro per l'articolo precedente, che ogni piramide è il terzo di un prisma di egual base e di eguale altezza.

XLIV.

Dalla misura de' solidi terminati da superficie

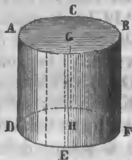
piane, passiamo a quella de' corpi terminati da superficie curve. E come nella Terza Parte abbiamo trattato delle sole figure, il cui contorno non contiene altre curve che archi di circolo, così limitiamoci qui pure ai soli corpi, di cui le curvature sono circolari.

Nell'esame di questi corpi dovremo proporci due oggetti, cioè la misura delle loro superficie, e quella delle loro solidità: perchè essendo le superficie di questi corpi o intieramente curve, o in parte piane, e in parte curve, non potremo rimandare per la loro misura alla Prima Parte, come abbiamo fatto pei corpi terminati da sole superficie piane.

XLV.

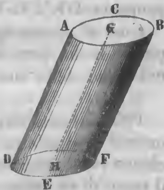
Il più semplice di tutti i corpi terminati da superficie curve è il cilindro. È questo un solido come ABCDEF (Fig. 129), le cui due basi ABC, DEF sono due circoli uguali, congiunti con una superficie curva, che può riguardarsi come formata da un piano piegato attorno alle loro circonferenze.

Fig. 129.



Allorchè i due circoli sono collocati in modo, che il centro G del primo cada sulla perpendicolare innalzata nel centro H del secondo, il cilindro si chiama retto.

Fig. 130.



Il cilindro si chiama al contrario obliquo, allorchè la linea tirata per i due centri G e H (Fig. 130) è obliqua rispetto a' piani ABC, DEF.

XLVI.

La formazion geometrica di questi solidi analoga

a quella de' prismi e de' parallelepipedi (art. XVII), consiste nel far muovere un circolo parallelamente a se stesso in modo, che tutti i suoi punti descrivano linee rette parallele, elevate fuori del piano di questo circolo.

XLVII.

Sovente occorre in pratica di misurare la superficie di un cilindro retto: questa misura si otterrà come segue:

Divise le due circonferenze ABC, DEF (Fig. 129) in uno stesso numero di parti eguali, sicchè i punti di divisione di sotto corrispondano a quelli di sopra, si tirino tante linee rette che congiungano gli angoli corrispondenti de' due poligoni regolari che potrebbero inscriversi nelle due basi, congiungendo due a due i successivi punti di divisione. Egli è chiaro, che si avrà allora un prisma, la superficie del quale sarà composta di altrettanti rettangoli compresi sotto la superficie del cilindro, quanti sono i lati inscritti in ciascuna delle circonferenze ABC, DEF. Or tutti questi rettangoli avendo l'altezza eguale ad AD, la lor misura totale sarà il prodotto dell' altezza AD per la somma di tutte le basi, cioè a dire pel contorno del poligono compreso o iscritto nel circolo DEF, ovvero ABC.

Ma siccome al crescere del numero de' lati di questo poligono, il contorno di esso si approssimerà sempre più alla circonferenza, e la superficie del prisma a quella del cilindro; ne segue che fingendo questo numero infinito, il prisma più non differirà dal cilindro. Dunque la superficie curva del cilindro retto è uguale ad un rettangolo che abbia AD per altezza, e per base una linea retta uguale alla circonferenza DEF.

Questa proposizione può servire a trovare per

esempio quanta stoffa sia necessaria per rivestire una colonna cilindrica, o per parare l' interno di una torre rotonda.

XLVIII.

Quanto alla superficie del cilindro obliquo, essa non può misurarsi nella medesima maniera: perchè in luogo di rettangoli si troveranno de' parallelogrammi di diversa altezza. Solo per via di metodi complicati e difficili si è arrivato a conoscere il valore approssimato di tali superficie, ed i problemi di questo genere non possono esporsi in un libro elementare.

XLIX.

La solidità de' cilindri sì retti che obliqui, si trova facilissimamente, essendo manifesto che tutto ciò che abbiam detto de' prismi, conviene egualmente a' cilindri, se si considera che questi si confondono coi prismi in essi inscritti, quando il numero de' lati di questi prismi si concepisce infinitamente grande.

E così i cilindri che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono eguali in solidità.

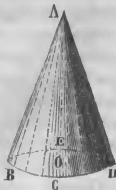
L.

E la misura di un cilindro qualunque si ha facendo il prodotto della sua base per la sua altezza.

LI.

Dopo il cilindro il cono è il più semplice fra i solidi terminati da superficie curve: chiamasi cono una figura come ABCDE (Fig. 131), che ha per base un circolo, e sulla superficie della quale si possono segnare un'infinità di linee rette, le quali passano tutte pel punto A, che chiamasi vertice, e incontrano la circonferenza BCDE della base. Il cono può dunque

Fig. 131.

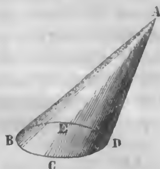


riguardarsi come una piramide che ha per base un circolo.

LII.

Se, come nella figura 131, il vertice A del cono è sulla perpendicolare eretta nel centro O della base, il cono dicesi retto; se la retta condotta dal vertice al centro della base è obliqua al piano di questa (Fig. 132), il cono dicesi obliquo.

Fig. 132.



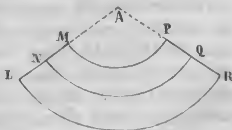
LIII.

Per misurare la superficie di un cono retto ABCDE (Fig. 131), questo si riguarderà come l'ultima delle piramidi che si possono ad esso inscrivere; cioè divisa la circonferenza della sua base BCDE in una infinità di piccoli lati, e tirate tante rette da tutti i punti di divisione al vertice del cono A, si troverà, che la superficie conica è il complesso di un' infinità di piccoli triangoli isosceli, l'altezza de' quali è eguale al lato AB del cono, e de' quali tutte le basi insieme unite sono eguali alla circonferenza BCDE; onde è facile conchiudere, che la misura di questa superficie si troverà moltiplicando la metà del lato AB per la circonferenza BCDE della base.

LIV.

Tutti i lati AB, AC, AD ecc. di un cono retto (Fig. 131) essendo eguali tra loro, se con un raggio eguale a questi lati si descriverà l'arco di circolo RL (Fig. 135) di lunghezza eguale alla circonferenza BCDE della base del cono, tirando alle estremità L, R

Fig. 135.



di quest'arco i raggi AL, AR, si formerà un settore LAR, il quale potrà invilupparsi sulla superficie curva del cono e la coprirà esattamente. Ciò conferma la regola ora insegnata per misurare questa superficie curva: poichè secondo l'art. x della Parte 3.ª la superficie del settore LAR, eguale a quella del cono, si trova moltiplicando la lunghezza dell'arco LR (eguale alla circonferenza BCDE), per la metà del raggio (eguale al lato AB).

LV.

Allorchè il cono è obliquo, la misura della sua superficie, come quella del cilindro obliquo, è assai difficile a trovare anco in modo approssimato, e questo pure è problema che non può trovar luogo negli Elementi.

LVI.

Quanto alla solidità de' coni sì retti che obliqui, essa si determina riguardando i coni come eguali alle ultime piramidi che si possano in essi inscrivere, ed applicando loro ciò che si è detto delle piramidi in generale.

E così i coni, che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono uguali.

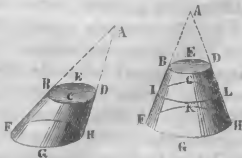
LVII.

E la solidità di un cono qualunque è misurata dal prodotto della base pel terzo della sua altezza.

LVIII.

Occorre qualche volta di misurare un corpo come BCDEFGH (Fig.ᵉ 133 e 134), che si chiama cono tronco, cioè la parte che resta di un cono AFGH, allorchè se ne leva un altro cono

Fig. 133 *e* 134.

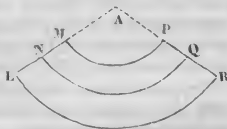


più piccolo ABCDE con un taglio parallelo alla base FGH. Egli è evidente che il volume di questo solido sarà la differenza tra quelli dei due coni ABCDE, AFGH.

LIX.

Quanto alla superficie di un tronco di cono retto, essa può determinarsi senza misurare separatamente le superficie dei due coni, per sottrarre l'una dall'altra. Ciò si farà col seguente metodo, che è una conseguenza dell'art. LIV.

Fig. 135.



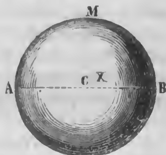
Supponghiamo che ALR (Fig. 135) sia il settore che bisogna costruire per poter coprire il cono AFGH (Fig. 134): si descriva dal centro A l'arco MP, con raggio AM eguale al lato AB (Fig. 134) del cono reciso ABCDE; egli è chiaro che lo spazio MPRL sarà una porzion di circolo capace di coprire la superficie cercata del cono tronco. Ora compiendo le due circonferenze cui appartengono gli archi MP ed LR, si avrebbe una corona circolare, misurata (Parte 3.ª, art. VIII) dal prodotto di ML eguale a BF per la circonferenza, di cui AN è il raggio, essendo N il punto di mezzo di ML. Dunque la porzione di corona MPRL, ovvero la superficie del cono troncato BCDEFGH, si misurerà moltiplicando ML per l'arco NQ, ovvero, moltiplicando BF (Fig. 134) per la circonferenza IKL della sezione fatta nel solido proposto da un piano parallelo alla base, e condotto pel mezzo del lato BF.

LX.

L'ultimo solido, di cui tratteremo, si chiama sfera o globo, ed è quello, la superficie del quale ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un medesimo punto, che 'n' è il centro. Spesso occorre di misurare questa superficie; per esempio, si domanderà quanta doratura vi voglia per una palla, o quanto piombo per una cupola ecc.

LXI.

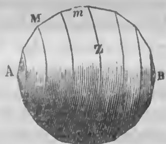
Fig. 136.



Sia X (Fig. 136) la sfera di cui si ha da misurare la superficie; egli è evidente che si può concepire questo solido come prodotto dalla rivoluzione di un semicircolo AMB, attorno al suo diametro AB.

Supponghiamo che in luogo della circonferenza noi abbiamo un poligono regolare di un numero infinito di piccoli lati, o se si vuole, di un grandissimo numero di lati, e si voglia misurare solamente la superficie Z (Fig. 137) prodotta dalla rivoluzione di questo poligono. Sarà facile passar poi alla misura della superficie della sfera, come dalla misura delle figure rettilinee siam potuti passare a quella del circolo.

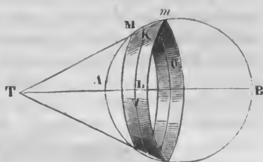
Fig. 137.



LXII.

Per misurare la superficie del solido Z (Fig. 138), esaminiamo la piccola parte di questa superficie generata da un solo lato qualunque M*m* del poligono inscritto, nel girare attorno al diametro AB. Egli è

evidente che questo lato Mm (Fig. 138) descrive in questo movimento la superficie V di un cono tronco; poichè prolungando la retta mM, finchè incontri in T il diametro o asse di rivoluzione AB, se



questa linea TMm gira nel tempo medesimo che il semicircolo AMB, essa descriverà manifestamente un cono retto, il quale avrà il vertice in T, ed il circolo descritto dal punto m per base. La superficie V generata dal movimento di Mm sarà dunque una porzione di superficie conica, compresa tra i piani de' circoli descritti dai punti M e m. Ma abbiam veduto (art. LIX) che la superficie V è uguale a un rettangolo che abbia per altezza Mm, e per base una retta eguale alla circonferenza KLO condotta pel punto K, mezzo di Mm. Dunque la superficie generata dalla rivoluzione del poligono è uguale alla somma di tanti rettangoli di questa natura, quanti sono i lati del poligono.

Or siccome tutti i lati Mm, cioè le altezze di questi rettangoli sono supposti eguali, si potrà riguardare la superficie cercata come un rettangolo che avrà l'altezza eguale ad Mm, e la base uguale alla somma di tutte le circonferenze come KL, cioè condotte pei punti di mezzo di ciascuno piccol lato.

Ma il poligono iscritto nel semicircolo AMB, avendo un grandissimo numero di lati, la piccolezza dell'altezza Mm, e la grandezza eccessiva della base rendono questo rettangolo impossibile a costruirsi.

Per rimediare a questo inconveniente, conviene trasformare questi piccoli rettangoli in altri equivalenti

che abbiano tutti la medesima altezza, non impercettibile come Mm, ma assai grande, e la base invece assai piccola; poichè la somma di tutte queste piccole basi, darà una lunghezza paragonabile all'altezza.

LXIII.

Vediamo dunque di trasformare in questo modo i nostri piccoli rettangoli. Fingiamo, per rendere semplice il ragionamento, che invece delle circonferenze KL (Fig. 138), essi abbiano per basi i raggi KI (Fig. 139) di queste circonferenze. Non sarà poi difficile di applicare ciò che avremo trovato per questi ultimi rettangoli, a quelli di cui dobbiamo trattare.

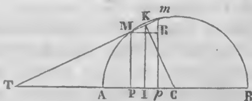


Fig. 139.

Debbasi dunque trovare un rettangolo eguale al prodotto di Mm per KI, e che abbia per altezza qualche linea incomparabilmente più grande che Mm, e che sia la medesima dovunque sia collocato questo piccolo lato Mm. Scegliamo, per esempio, la retta CK, che è l'apotema del poligono del quale Mm è il lato, e che per conseguenza è sempre il medesimo a qualunque lato del poligono appartenga. Dovrem cercare una linea il cui prodotto per CK sia eguale al prodotto di KI per Mm, cioè (Parte 2.ª, art. VII) una quarta proporzionale alle tre linee KC, KI, Mm. Abbassiamo la MR perpendicolare a mp: avremo così i triangoli MmR, KIC, che saranno simili, poichè saranno rettangoli, l'uno in R, l'altro in I, e di più gli angoli mMR, IKC saranno uguali tra loro, perchè il primo sommato con MmR fa un angolo retto, e l'altro IKC sommato con MKI, eguale ad MmR, fa pure un angolo retto.

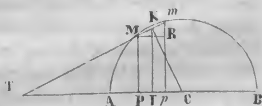
Ne concluderemo facilmente, che KC sta a KI, come M*m* a MR, cioè che la MR è la quarta proporzionale cercata; o quel che è il medesimo, che il rettangolo di KC per MR o per P*p* è uguale al rettangolo di M*m* per KI.

Ma poichè il rettangolo che volevamo trasformare non era quello di M*m* per KI, ma sibbene di M*m* per la circonferenza di cui KI è il raggio, e siccome le circonferenze sono tra loro come i raggi; ne concluderemo ancora che l'eguaglianza del rettangolo di M*m* per KI, e del rettangolo di P*p* per CK, si tira dietro necessariamente l'eguaglianza del rettangolo di M*m* per la circonferenza di raggio KI, col rettangolo di P*p* per la circonferenza di raggio CK. Poichè si vede facilmente che dati due rettangoli equivalenti, se non si variano le loro altezze, e si aumentano nella stessa ragione le loro basi, i nuovi rettangoli così formati saranno ancora equivalenti.

LXIV.

Avendo trovato ne' due articoli precedenti che tutte le piccole superficie coniche tronche come V (Fig. 138) sono eguali ad altrettanti rettangoli, tutti di altezza uguale alla circonferenza, di cui KC (Fig. 139) è il raggio; e ciascuno dei quali ha per base una piccola retta P*p* corrispondente a ciaschedun lato M*m*; se ne ricaverà, che la somma delle piccole superficie coniche generate dai lati inscritti nel circolo A*m*B dal punto A fino al punto *m*, sarà uguale a un rettangolo che abbia per altezza una retta uguale alla circonferenza di

Fig. 139.



CK, e per base la somma di tutte le linee Pp, prese da A fino a p, cioè la retta Ap.

Dunque per avere la superficie totale, prodotta dalla rivoluzione del poligono intero, bisogna fare un rettangolo che abbia per base la circonferenza descritta dal raggio CK, e per altezza il diametro AB.

LXV.

Riuscirà ora cosa facilissima il misurare la superficie della sfera. Poichè è chiaro, che quanti più lati avrà il poligono, e più il solido prodotto dalla sua rivoluzione si approssimerà ad esser eguale alla sfera, e più ancora l'apotema CK si accosterà ad essere uguale al raggio, in modo che supponendo che il poligono si confonda col circolo, l'apotema CK sarà il raggio medesimo, e la superficie della sfera sarà equivalente ad un rettangolo, del quale l'altezza e la base sieno il diametro e la circonferenza del circolo che con la sua rivoluzione ha generata la sfera, e che si suole chiamare il circolo massimo della sfera stessa.

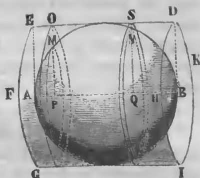
LXVI.

Quanto alla superficie curva di un segmento di sfera AMLNO (Fig. 140), cioè della parte di sfera recisa da un piano qualunque MLNO, essa ha per misura il prodotto della sua grossezza, o vogliam dire della *saetta* AP, per la circonferenza del circolo massimo AMBN. Ciò risulta dalla dimostrazione colla quale abbiamo provato (art. LXIV), che la somma delle superficie di tutti i piccoli coni tronchi compresi da A fino a m (Fig. 139) è uguale al rettangolo, di cui l'altezza è Ap, e la base una linea uguale alla circonferenza, di cui CK è il raggio.

LXVII.

La misura precedente della superficie della sfera ci

mostra che facendo girare il rettangolo ABDE ed il semicircolo AMNB (Fig. 141) intorno ad AB, la superficie curva del cilindro retto EFGIKDH prodotta dalla rivoluzione del rettangolo, sarà uguale a quella della sfera descritta dal semicircolo; ciò che si esprime ordinariamente così: la superficie della sfera è uguale alla superficie curva del cilindro circoscritto.



LXVIII.

E se si dividono tanto il cilindro quanto la sfera per mezzo di due piani qualunque perpendicolari in P ed in Q al diametro AB, le porzioni delle superficie sferica e cilindrica generate dal movimento della retta OS, e dall'arco MN, saranno eguali.

LXIX.

Segue ancora dalle cose dette, che la superficie della sfera è uguale all'area del suo circolo massimo presa quattro volte. Perchè la superficie di questo circolo ha per misura il prodotto della metà del raggio, ossia della quarta parte del diametro per la circonferenza; e la superficie della sfera è uguale al prodotto del diametro intiero per la medesima circonferenza.

LXX.

Trovata la misura della superficie della sfera è facile misurarne la solidità: infatti la sfera può considerarsi come composta di una infinità di piccole piramidi che abbiano tutto il loro vertice nel centro, e le cui basi ricoprano l'intera superficie della sfera. Or ciascuna di queste piramidi avendo

per misura il prodotto del terzo della sua altezza, cioè del terzo del raggio per la sua base, la loro somma totale, ossia la solidità della sfera si misurerà moltiplicando il terzo del raggio per la sua superficie, cioè per l'area del circolo massimo presa quattro volte.

LXXI.

Siccome tanto fa il dire il prodotto del terzo del raggio per l'area del circolo massimo presa quattro volte, quanto il dire il prodotto del terzo del raggio preso quattro volte, cioè di due terzi del diametro pel circolo massimo; e per altra parte la solidità del cilindro EFGIKDH ha per misura il prodotto del diametro pel circolo massimo che gli serve di base, ne segue, che la solidità della sfera è eguale ai due terzi di quella del cilindro circoscritto.

LXXII.

Fig. 140.

Per misurare la solidità di un segmento di sfera AMLNO (Fig. 140), è evidente, che converrà misurare la porzione di sfera prodotta dalla rivoluzione del settore CAM, la qual cosa si farà moltiplicando il terzo del raggio per la superficie del proposto segmento AMLNO: poi detrarre da questa misura quella del cono prodotto dalla rivoluzione del triangolo CPM, cioè il cono, che ha per base il circolo MLNO e per altezza CP; il resto sarà il valore dimandato del segmento.

LXXIII.

Conchiuderemo questi Elementi con alcune proposizioni sulle solidità e sulle superficie de' corpi simili. Queste proposizioni immediatamente derivano dalle condizioni da cui dipende la similitudine di due

corpi, e l'analogia potrebbe bastare a farle scoprire rammentando ciò che abbiam detto (Parte 1.ª, art. XXXIV e seguenti) della similitudine delle figure piane.

Abbiamo stabilito (art. XXXII) in che consista la similitudine di due piramidi; la definizíone delle piramidi simili si può stendere a tutti i corpi terminati da facce piane. Due corpi qualunque così terminati si diranno dunque simili, quando tutti gli angoli formati dai lati del primo saranno eguali agli angoli formati dai lati del secondo, ed i lati di quello saranno proporzionali ai lati omologhi di questo.

LXXIV.

Quanto a' corpi che non sono terminati da ogni parte da' piani, quali sono per esempio i cilindri ed i coni, è facile di determinare le condizioni della loro similitudine: così due cilindri retti sono simili quando le loro altezze sono proporzionali ai raggi delle lor basi.

LXXV.

Se i cilindri sono obliqui, è di più necessario che le linee, che congiungono i centri delle due basi in ciascuno di questi cilindri, facciano angoli eguali coi piani delle basi.

LXXVI.

Le medesime definizioni si possono applicare ai coni sostituendo alla linea, che passa pei centri delle due basi del cilindro, quella che va dal vertice del cono al centro della base.

LXXVII.

Perchè due coni tronchi sieno simili è necessario in primo luogo che i coni, di cui fanno parte, sieno simili; in secondo luogo che le loro altezze sieno tra loro come i raggi delle basi.

LXXVIII.

Quanto alle sfere si vede subito che esse sono tutte simili; e lo stesso avviene per tutte le figure piane o solide, che sono pienamente determinate quando in esse si conosce una linea sola, quali sono il circolo, il quadrato, il triangolo equilatero, il cubo, il cilindro circoscritto alla sfera ecc.

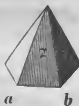
LXXIX.

In generale si può affermare rispetto alle figure solide simili quel che si è detto delle figure simili e piane; cioè che esse differiscono soltanto per la scala con cui sono state costrutte.

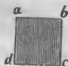
Ciò basta per condurre a due proposizioni fondamentali sulle superficie e sulle solidità de' corpi simili.

LXXX.

Fig. 142.



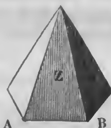
142 *bis*



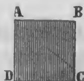
142 *ter*

$\frac{p}{\boxed{x}}$

Fig. 143.



143 *bis*



143 *ter*

$\frac{P}{\boxed{X}}$

La prima proposizione ci insegna, che le superficie di due solidi simili sono tra loro come i quadrati dei loro lati omologhi; per esempio, che tra le superficie di due piramidi simili z e Z (Fig.^{e} 142 e 143), passa la medesima relazione che tra' quadrati *abcd*, ABCD (Fig. 142 *bis*, e 143 *bis*), fatti sui lati *ab*, AB, che si corrispondono in queste due piramidi.

Per discoprire la verità di questa proposizione non occorrono nuove dimostrazioni (Parte 1.^{a}, art. XLIII e XLIV), e basta considerare che se P è la scala

della piramide Z, e p la scala della piramide simile z, le linee che bisogna misurare per trovare le superficie di Z e del quadrato ABCD, conterranno tante volte la linea P, quante volte la p sarà contenuta in quelle che s' impiegheranno per misurare le superficie di z e del quadrato $abcd$.

Onde segue che il prodotto delle linee che entrano nella misura delle superficie di Z e di ABCD conterrà tante volte il quadrato X fatto sulla linea P, quante volte il prodotto delle linee che entrano nella misura delle superficie z e $abcd$, conterrà il quadrato x fatto su p: cioè a dire che il numero che esprime il rapporto della superficie della piramide Z al quadrato ABCD, sarà il medesimo che esprimerà il rapporto della superficie z al quadrato $abcd$.

Il medesimo discorso varrà per tutti gli altri corpi simili, sieno essi terminati da piani, ovvero da superficie curve: perchè le linee impiegate a misurare le superficie di tutti questi corpi conterranno sempre il medesimo numero di parti delle loro rispettive scale; e per conseguenza il prodotto di queste linee conterrà un medesimo numero di volte i quadrati di queste medesime parti.

E se le linee necessarie per misurare le superficie de' corpi simili fossero incommensurabili, è chiaro che la dimostrazione sussisterebbe sempre, potendo qui applicarsi i medesimi principii de' quali ci siamo serviti (Parte 2.ª, art. XXVIII) per le figure piane simili di lati incommensurabili.

LXXXI.

Si dimostrerà nello stesso modo che le superficie delle sfere sono tra loro come i quadrati de' loro

raggi. Ma per vederlo ancora più chiaramente, basterà ricordarsi che le superficie de' circoli sono tra loro come i quadrati de' loro raggi (Parte 3.ª, art. VI), e che le superficie delle sfere sono quadruple di quelle de' loro circoli massimi (art. LXIX).

LXXXII.

La proporzionalità tra le superficie de' corpi simili ed i quadrati de' loro lati omologhi è sì generale, che si può applicare tanto a' corpi de' quali si conosce la misura, quanto a quelli di cui la misura è ignota.

Per esempio, senza saper misurare la superficie di un cilindro obliquo, si può affermare, che le superficie di due cilindri obliqui simili sono tra loro come i quadrati de' diametri delle basi di questi cilindri. Perchè iscrivendo a questi due cilindri due prismi simili di quante faccie si vorrà, si vedrà tosto che le superficie di questi prismi saranno tra loro come i quadrati de' diametri delle basi. Dunque considerando i cilindri medesimi come gli ultimi prismi iscritti, si concluderà che le loro superficie hanno la medesima ragione.

LXXXIII.

La proposizione fondamentale rispetto alla solidità de' corpi simili è questa:

I solidi simili stanno tra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

Questa proposizione si può dimostrare come la precedente, considerando che le figure simili non differiscono tra loro che per la scala con cui sono state costrutte.

Per rendere più semplice la dimostrazione, noi ci serviremo dell' esempio di due prismi simili Z e z

(Fig.e 144 e 145), e di due cubi X e x (Fig.e 144 *bis* e 145 *bis*), i lati dei quali sieno eguali ad AB, ab, linee omologhe in questi due prismi; di più supporremo queste linee AB, ab, divise in un numero eguale e grandissimo di parti per poter misurare le dimensioni di questi solidi. Or ciò posto, è chiaro che il prisma z ed il cubo x conterranno tante volte il cubo di una delle parti di ab, quante volte il prisma Z ed il cubo X contengono il cubo fatto sopra una delle parti di AB.

Fig. 144.

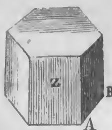
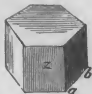


Fig. 145.



144 *bis*



145 *bis*



Si farà il medesimo discorso per tutti gli altri solidi, e quelli stessi le cui dimensioni sono incommensurabili, staranno tuttavia nella medesima ragione che i cubi de' loro lati omologhi.

LXXXIV.

Così, per esempio, le solidità delle sfere stanno tra loro come i cubi de' loro raggi.

FINE.

INDICE

PARTE PRIMA.

PARTE SECONDA.

PARTE TERZA.

PARTE QUARTA.

